KLAUSUR

Mathematik III für Elektrotechniker

6.3.2002

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben
und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 9 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Gegeben sei die Differenzialgleichung:

$$y' = \cos(x)\, e^{y} \,.$$

Man bestimme die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\ln(2) \quad \text{bzw.} \quad y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\ln(2)\,.$$

Man gebe den maximalen Definitionsbereich der jeweiligen Lösung an.
(6P)

2. Man bestimme die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung:

$$y''' + 3\,y'' + 8\,y' = 0\,.$$

Wie lautet die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(\pi) = \frac{7}{3}, \quad y'(\pi) = 0\,, \quad y''(\pi) = 0\,?$$

(4P)

3. Gegeben sei das System: $Y' = AY$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme ein Fundamentalsystem, indem man Eigenwerte und Eigenvektoren von A berechnet.
(8P)

Lösungen

1.) Durch Trennung der Veränderlichen ergibt sich die Lösung des Anfangswertproblems aus:

$$\int_{-\ln(2)}^{y} e^{-s}\, ds = \int_{\pm\frac{\pi}{2}} \cos(t)\, dt\,.$$

Ausführen der Intergration ergibt:

$$-e^{-y} + e^{\ln(2)} = \sin(y) - \sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$$

bzw.

$$e^{-y} = -\sin(y) + \sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) + 2\,.$$

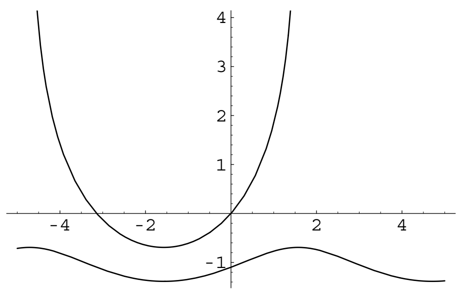
Im ersten Fall lautet die Lösung:

$$y(x) = -\ln(3 - \sin(x))\,.$$

Diese Lösung ist auf der ganzen reellen Achse erklärt.
Im zweiten Fall lautet die Lösung:

$$y(x) = -\ln(1 - \sin(x))\,.$$

Diese Lösung ist nur solange erklärt, wie die Sinusfunktion ausgehend vom Anfangpunkt echt kleiner als Eins bleibt. Im offenen Intervall $\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ist $\sin(x) < 1$, während in den Randpunkten des Intervalls der Wert Eins erreicht wird. Die Lösung $y(x) = -\ln(1-\sin(x))$ ist dann nicht mehr erklärt und kann nicht weiter fortgesetzt werden.



Die Lösungen:
$y(x) = -\ln(3 - \sin(x))$,
$y(x) = -\ln(1 - \sin(x))$

2.) Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^3 + 3\,\lambda^2 + 8\,\lambda = \lambda\,(\lambda^2 + 3\,\lambda + 8) = 0\,.$$

Es ergeben sich folgende Nullstellen:

$$\lambda_1 = 0\,, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{23}}{2}\,i\,, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2}\,i\,.$$

Damit erhält man ein Fundamentalsystem

$$y_1(x) = 1\,, \quad y_2(x) = e^{-\frac{3}{2}\,x}\,\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\,x\right)\,, \quad y_3(x) = e^{-\frac{3}{2}\,x}\,\sin\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\,x\right)\,,$$

und die allgemeine Lösung:

$$y(x) = c_1 + c_2\,y_2(x) + c_3\,y_3(x)\,.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems kann man direkt sehen:

$$y(x) = \frac{7}{3}\,.$$

3.) Es gilt

$$\det(A - \lambda\,E) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 + 3 = 0\,.$$

Damit ergeben sich folgende Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}\,i\,, \quad \lambda_2 = 2 - \sqrt{3}\,i\,.$$

Wir suchen einen Eigenvektor zum Eigenwert λ_1:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 \\ -3 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\,i & 1 \\ -3 & -\sqrt{3}\,i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Dieses homogene System besitzt einen Lösungsraum der Dimension eins. Eine Basislösung ergibt sich aus der Gleichung:

$$-\sqrt{3}\,i\,u_1 + u_2 = 0\,.$$

Setzen wir $u_1 = 1$, so ergibt sich $u_2 = \sqrt{3}\,i$. Eine komplexwertige Lösung des Differenzialgleichungssystems lautet damit:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \sqrt{3}\,i \end{pmatrix} e^{(2+\sqrt{3}\,i)\,x} .$$

Um ein Fundamentalsystem aus zwei reellwertigen Lösungen zu bekommen, bestimmen wir Real- und Imaginärteil von $Y(x)$:

$$Y_1(x) = \Re(Y(x)) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}\,x) \\ \\ -\sqrt{3}\,\sin(\sqrt{3}\,x) \end{pmatrix} e^{2\,x} ,$$

$$Y_2(x) = \Im(Y(x)) = \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{3}\,x) \\ \sqrt{3}\,\cos(\sqrt{3}\,x) \end{pmatrix} e^{2\,x} .$$