KLAUSUR

Mathematik III für Elektrotechniker

23.9.2005

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 15 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

1. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems
$$y' = \frac{e^x}{y}\,, \quad y(0) = 3\,,$$
geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Lösung an.
(6P)

2. (a) Gegeben sei die Differenzialgleichung:
$$y' = y^2\,.$$
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch Trennung der Veränderlichen.
(b) Welche Differenzialgleichung ergibt sich für die durch $y(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)}$ eingeführte neue Funktion $u(x)$? Bestimmen Sie daraus die Lösungen der Ausgangsgleichung.
(6P)

3. Gegeben sei das System:
$$y_1' = 2\,y_1 + y_2\,, \quad y_2' = -y_2\,.$$
Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem.
(6P)

4. Die Funktion
$$f(z) = \frac{1}{z} = w$$
bilde komplexe Zahlen $z = x+y\,i \neq 0$ in komplexe Zahlen $w = u+v\,i \neq 0$ ab. Geben Sie den Realteil und den Imaginärteil der Funktion an sowie die Urbilder der Geraden $u = u_0 = konst.$, $v = v_0 = konst.$. Dabei sind $u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$ beliebige reelle Zahlen.
(6P)

5. Welche Polstellen besitzt die Funktion
$$f(z) = \frac{z^2+z+1}{z^2+1}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$
Sei Γ eine einfach geschlossene Kurve in der Gaußschen Ebene, welche die Polstellen im positiven Sinn umläuft. Geben Sie den Wert des Kurvenintegrals $\int_\Gamma f(z)\,dz$ an.
(6P)

Lösungen

1.) Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der Gleichung

$$\int y\,dy = \int e^x\,dx + c$$

bzw.

$$\frac{y^2}{2} = e^x + c\,.$$

Für das AWP kommt nur eine Lösung aus der oberen Halbebene in Betracht:

$$y(x) = \sqrt{2\,e^x + d}\,, \quad d = 2\,c\,.$$

Aus $y(0) = 3$ ergibt sich $d = 7$. Die Lösung existiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

2.) (a) Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der Gleichung

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int dx + c$$

bzw.

$$-\frac{1}{y} = x + c\,.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = -\frac{1}{x+c}\,, \quad x \neq -c\,.$$

(b) Durch Einsetzen von

$$y'(x) = -\frac{u''(x)}{u(x)} + \frac{(u'(x))^2}{(u(x))^2}$$

ergibt sich:

$$-\frac{u''(x)}{u(x)} + \frac{(u'(x))^2}{(u(x))^2} = \frac{(u'(x))^2}{(u(x))^2}$$

bzw.

$$u''(x) = 0\,.$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$u(x) = c_1\,x + c_2\,.$$

Der Quotient

$$y(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{c_1}{c_1\,x + c_2} = -\frac{1}{x + \frac{c_2}{c_1}}$$

liefert die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung.
3.) Wir beginnen mit der zweiten Gleichung und bekommen:

$$y_2(x) = c_2\,e^{-x}\,.$$

Mit dem Ansatz

$$y_{2p}(x) = r\,e^{-x}\,, \quad r = konst.$$

ergibt sich die partikuläre Lösung

$$y_{1p}(x) = -\frac{c_2}{3}\,e^{-x}$$

für

$$y_1' = 2\,y_1 + c_2\,e^{-x}\,.$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung des Systems zu:

$$y_1(x) = c_1\,e^{2\,x} - \frac{c_2}{3}\,e^{-x}\,, \quad y_2(x) = c_2\,e^{-x}\,.$$

In Vektorform lautet dies:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} c_1\,e^{2\,x} - \frac{c_2}{3}\,e^{-x} \\ c_2\,e^{-x} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{2\,x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\,e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix}\,.$$

Wir entnehmen folgendes Fundamentalsystem:

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} e^{2\,x} \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\,e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix}\,.$$

Man kann auch die Eigenwerte und Eigenvektoren der Systemmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bestimmen und erhält:

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2\,x}\,, \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}\,.$$

Eigenwerte: $2, -1$, Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.) Wir zerlegen f in Real- und Imaginärteil ($x \neq 0$, $y \neq 0$):

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x + x\,i) = \frac{1}{x + y\,i} \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\,i \\ &= u(x, y) + v(x, y)\,i\,. \end{aligned}$$

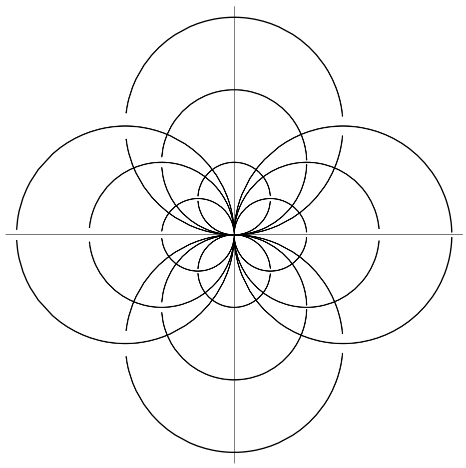
Die Urbilder der Geraden in der w-Ebene $u = u_0 \neq 0$ bzw. $v = v_0 \neq 0$ lauten in der z-Ebene:

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = u_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2\,u_0}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4\,u_0^2}$$

bzw.

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = -v_0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + \left(y + \frac{1}{2\,v_0}\right)^2 = \frac{1}{4\,v_0^2}\,.$$

Das Urbild der v-Achse $u = 0$, $v \neq 0$ ist die y-Achse $x = 0$, $y \neq 0$.



Urbilder der Geraden
$u = u_0$, $v = v_0$
unter $f(z) = \dfrac{1}{z}$

5) Die Funktion $f(z)$ besitzt die einfachen Pole $z = \pm i$. Wir berechnen die Residuen:

$$\operatorname{Res}\,(f(z), i) = \operatorname{Res}\left(\frac{\frac{z^2+z+1}{z+i}}{z - i}, i\right) = \left.\frac{z^2 + z + 1}{z + i}\right|_{z=i} = \frac{1}{2}\,,$$

$$\operatorname{Res}\left(f(z), -i\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{\frac{z^2+z+1}{z-i}}{z+i}, -i\right) = \left.\frac{z^2+z+1}{z-i}\right|_{z=-i} = \frac{1}{2}\,.$$

Man kann die Residuen auch sofort aus der Partialbruchzerlegung bekommen:

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{z+i} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{z-i}$$

Nach dem Residuensatz gilt:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\,\pi\,i\,\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2\,\pi\,i\,.$$