KLAUSUR

Mathematik III für Elektrotechniker/Mechatroniker

24.9.2009

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Für jede Aufgabe gibt es 6 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 15 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.

Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = -\frac{y^3}{2\,x}\,.$$

   Geben Sie den Definitionsbereich der Lösungen an.

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung:

$$y^{(4)} + y = 3\,.$$

3. Gegeben ist das Differenzialgleichungssystem:

$$Y' = A\,Y\,, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

   Geben Sie ein Fundamentalsystem an, indem Sie (a) das System direkt lösen (b) indem Sie die Matrixexponentialfunktion $e^{A\,x}$ berechnen.

4. Wir betrachten die Funktion:

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad f(z) = z^2\,.$$

   Seien z_1 und z_2 zwei Zeiger in der oberen Halbebene, die den Winkel ϕ einschließen. Welchen Winkel schließen die Bilder die Zeiger ein? Welches Bild ergibt sich für eine Ursprungsgerade?

5. Der Weg Γ führt auf der reellen Achse von 0 zu 1 und dann auf einer Parallelen zur imaginären Achse von 1 zu $1+i$. Berechnen Sie das Kurvenintegral:

$$\int_\Gamma (\bar{z})^2\,dz\,.$$

Lösungen

1.) Trennung der Veränderlichen ergibt:

$$\int \frac{-2}{y^3}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx\,.$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der Beziehung

$$\frac{1}{y^2} = \ln(|x|) + C \quad \text{bzw.} \quad y = \pm\sqrt{\frac{1}{\ln(|x|)+c}}\,.$$

Das Pluszeichen bzw. das Minuszeichen steht für Lösungen in der oberen bzw. unteren Halbebene. Außerdem ist $y = 0$ eine Lösung. Die Lösungen sind erklärt für $\ln() + c > 0$ bzw. für $x > e^{-c}$ oder $x < -e^{-c}$.

2.) Das charakteristische Polynom (der homogenen Gleichung) lautet:

$$\lambda^4 + 1 = 0$$

bzw.

$$\lambda^4 = e^{\pi\,i}\,.$$

Wir haben also folgende Nullstellen:

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}\,, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}}\,, \quad -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\,, \quad -\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

und das Fundamentalsystem:

$$y_1(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\,x}\,\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x\right)\,, \quad y_2(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\,x}\,\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x\right)\,,$$

$$y_3(x) = e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\,x}\,\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x\right)\,, \quad y_4(x) = -e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\,x}\,\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x\right)\,.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet:

$$y(x) = c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x) + c_3\,y_3(x) + c_4\,y_4(x) + 3\,.$$

3a) Das System lautet ausgeschrieben mit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$:

$$y_1' = y_2\,, \quad y_2' = y_3\,, \quad y_3' = 0\,.$$

Hieraus ergibt sich:

$$y_3 = c_3\,, \quad y_2 = c_3\,x + c_2\,, \quad y_1(x) = c_3\,\frac{x^2}{2} + c_2\,x + c_1\,.$$

Daraus ergibt sich ein Fundamentalsystem für das System:

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad Y_3(x) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ x \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

3b) Das charakteristische Polynom von A lautet:

$$\det(A - \lambda\,E) = -\lambda^3\,.$$

Also gilt:

$$A^3 = O\,.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} e^{A\,x} &= E + A\,x + A^2\,\frac{x^2}{2} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

4) Seien:

$$z_1 = r_1\,e^{\phi_1\,i}\,,\ z_2 = r_2\,e^{\phi_2\,i}\,,$$

$r_1, r_2 > 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq \phi_1 < \phi_2 < \frac{\pi}{2}$, zwei Zeiger, die den Winkel $\phi_2 - \phi_1$ einschließen, dann schließen

$$z_1^2 = r_1^2\,e^{2\,\phi_1\,i}\,,\ z_2 = r_2^2\,e^{2\,\phi_2\,i}\,,$$

den Winkel $2(\phi_2 - \phi_1)$ ein.
Eine Ursprungsgerade:

$$z(r) = r\,e^{\phi_0\,i}\,,\ r \in \mathbb{R}\,,$$

wird auf den Strahl abgebildet:

$$\{w \,|\, w = r^2\,e^{2\,\phi_0\,i}, r \in \mathbb{R}\}\,.$$

5) Wir stellen den Weg wie folgt dar

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

mit den Parameterdarstellungen:

$$\begin{array}{lll} \Gamma_1 : & z(t) = t\,, & 0 \leq t \leq 1\,, \\ \Gamma_2 : & z(t) = 1 + t\,i\,, & 0 \leq t \leq 1\,. \end{array}$$

Damit ergibt sich das Kurvenintegral:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \bar{z}^2\,dz &= \int\limits_{\Gamma_1} \bar{z}^2\,dz + \int\limits_{\Gamma_2} \bar{z}^2\,dz \\ &= \int\limits_0^1 t^2\,dt + \int\limits_0^1 (1 - t\,i)^2\,i\,dt \\ &= \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\,i\,. \end{aligned}$$