KLAUSUR

Mathematik III (E)

16.3.98

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 11 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

1. Man bestimme diejenige Lösung der Differentialgleichung:
$$y' = -\frac{x}{x^2+1}\,y\,,$$
welche die Bedingung erfüllt: $\lim\limits_{x\to\infty} x\,y(x) = 1$.
Man skizziere diese Lösung.
(4P)

2. Gegeben sei die Differentialgleichung:
$$y' = y^2 - \delta^2\,, \quad (\delta > 0)\,.$$
Man zeige, daß jede Lösung mit $-\delta < y(x) < \delta$ einen Wendepunkt, aber keine Extremalstelle besitzt.
(4P)

3. Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung:
$$y'' + 4\,y = \sin(3\,x)\,.$$
Man beschreibe drei Wege zur Herstellung einer partikulären Lösung: Variation der Konstanten, Ansatzmethode, Laplacetransformation.
(4P)

4. Man bestimme ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung:
$$y^{(3)} - 2\,y'' + 10\,y' = 0$$
und gebe die Lösung des Anfangswertproblems:
$$y(2) = y'(2) = y''(2) = 0$$
an.
(4P)

5. Gegeben sei das System: $Y' = AY$ mit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\,.$$
Man bestimme ein Fundamentalsystem, indem man

   (a) zu Einzeldifferentialgleichungen übergeht,

   (b) die Matrixexponentialfunktion: $e^{A\,x}$ berechnet.

   (6P)

Lösungen

1.) Es liegt eine lineare homogene Differentialgleichung vor. Ihre allgemeine Lösung hat die Gestalt:

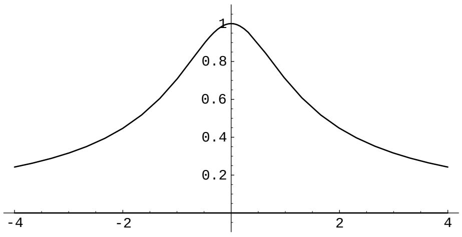
$$y(x) = c\, e^{\int \frac{x}{x^2+1}\, dx} = c\, e^{-\frac{1}{2}\, \ln(x^2+1)} = \frac{c}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Mit der allgemeinen Lösung bekommt man folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to\infty} x\, \frac{c}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{c}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = c\,.$$

Die geforderte Grenzwertbeziehung wird also für $c = 1$ erfüllt. Die gesuchte Lösung lautet:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$



Die Lösung $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

2.) Wir lösen die Differenzialgleichung im Gebiet

$$-\delta < y < \delta \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 - \delta^2 < 0$$

($\delta > 0$) durch Trennung der Veränderlichen. Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der Gleichung

$$\int \frac{1}{y^2-\delta^2}\, dy = \int dx + c\,.$$

Mit der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{y^2-\delta^2} = \frac{1}{2\,\delta}\, \left(\frac{1}{y-\delta} - \frac{1}{y+\delta}\right)$$

bekommen wir im Gebiet $-\delta < y < \delta$ folgende Gleichung:

$$\frac{1}{2\,\delta}\, \ln(\delta - y) - \frac{1}{2\,\delta}\, \ln(y+\delta) = x + c\,.$$

Durch Umformen erhalten wir die Au¤ösung:

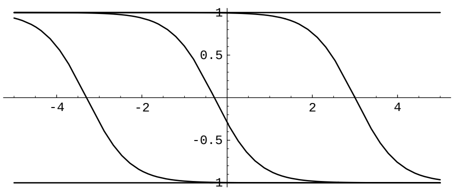
$$\begin{aligned} \frac{1}{2\,\delta}\,\ln\left(\frac{\delta-y}{y+\delta}\right) &= x+c \\ &\Updownarrow \\ \frac{\delta-y}{y+\delta} &= e^{2\,\delta\,(x+c)} \\ &\Updownarrow \\ y(x) &= \delta\,\frac{1-e^{2\,\delta\,(x+c)}}{1+e^{2\,\delta\,(x+c)}}\,. \end{aligned}$$

Somit sind alle Lösungen in dem zu Grunde gelegten Bereich auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt.

Wegen $y'(x) = (y(x))^2 - \delta^2 < 0$ kann $y'(x)$ nirgends verschwinden. Eine Nullstelle der zweiten Ableitung $y''(x) = 2y(x)y'(x)$ kann als genau dort vorliegen, wo y eine Nullstelle besitzt. Nun gilt

$$y(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -c\,.$$

Mit $y'''(x) = 2(y'(x))^2 + 2y(x)y''(x)$ bekommt man $y'''(-c) = 2(y'(-c))^2 > 0$. Also ist $x = -c$ die einzige Minimalstelle von y' und somit die einzige Wendestelle von y.



Lösungen
$y(x) = \delta\,\dfrac{1-e^{2\,\delta\,(x+c)}}{1+e^{2\,\delta\,(x+c)}}$
(bei $\delta = 1$) für verschiedene c

3.) Wir beschreiben folgende Lösungswege: (a) Variation der Konstanten, (b) Ansatzmethode, (c) Laplacetransformation der Gleichung.
(a) Wir benötigen zunächst ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung. Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

besitzt die Lösungen $\lambda_{1,2} = \pm 2\,i$. Hieraus ergibt sich das Fundamentalsystem für die homogene Gleichung

$$y_1(x) = \sin(2\,x)\,, \quad y_2(x) = \cos(2\,x)\,.$$

Eine partikuläre Lösung

$$y_p(x) = c_{p,1}(x)\,y_1(x) + c_{p,2}(x)\,y_2(x)$$

bekommt man durch Bestimmung der Koef£zientenfunktionen $c_{p,1}(x)$, $c_{p,2}(x)$ aus dem System:

$$\begin{aligned} c_{p,1}'(x)\, y_1(x) + c_{p,2}'(x)\, y_2(x) &= 0\,, \\ c_{p,1}'(x)\, y_1'(x) + c_{p,2}'(x)\, y_2'(x) &= \sin(3\,x)\,, \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} c_{p,1}'(x) &= \sin(3\,x)\, \cos(\sqrt{2}\,x)\,, \\ c_{p,2}'(x) &= \sin(3\,x)\, \sin(\sqrt{2}\,x)\,. \end{aligned}$$

(b) Die Differenzialgleichung

$$y'' + 4\,y = \Im\left(e^{3\,i\,x}\right)$$

wird als Imaginärteil der Differenzialgleichung

$$y'' + 4\,y = e^{3\,i\,x}$$

für komplexwertige Funktionen aufgefasst. Mit dem Ansatz

$$y_p(x) = c\, e^{3\,i\,x}$$

ergibt sich durch Einsetzen:

$$-c\, 3^2 + 4\,c = 1\,.$$

Damit erhalten wir die komplexwertige partikuläre Lösung:

$$y_p(x) = -\frac{1}{5}\, e^{3\,i\,x}\,.$$

Schließlich ergibt sich die reellwertige Lösung der Ausgangsgleichung:

$$\Im(y_p(x)) = -\frac{1}{5}\, \sin(3\,x)\,.$$

(c) Wir unterwerfen $y(x)$ der Laplacetransformation:

$$\mathcal{L}(y(x))(s) = Y(s)\,.$$

Mit dem Differentiationssatz bekommt man:

$$\mathcal{L}(y''(x))(s) = s^2\, Y(s) - s\, y(0) - y'(0)\,.$$

Da eine partikuläre Lösung gesucht wird, entscheiden wir uns für diejenige welche $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ erfüllt. Berücksichtigen wir noch die Transformation

$$\mathcal{L}(sin(3\,x))(s) = \frac{3}{s^2 + 9}\,,$$

so ergibt sich folgende Gleichung im Bildraum:

$$s^2\,Y(s) + 4\,s = \frac{3}{s^2 + 9}$$

mit der Lösung

$$Y(s) = \frac{3}{(s^2 + 4)\,(s^2 + 9)} = \frac{3}{5}\,\frac{1}{s^2 + 4} - \frac{3}{5}\,\frac{1}{s^2 + 9}\,.$$

Die Rücktransformation ergibt die Lösung

$$y(x) = \frac{3}{10}\,\sin(2\,t) - \frac{1}{5}\,\sin(3\,t)\,.$$

4.) Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^3 - 2\,\lambda^2 + 10\,\lambda = 0\,.$$

Spaltet man die offensichtliche Lösung $\lambda_1 = 0$ ab, so bleibt noch die Gleichung

$$\lambda^2 - 2\,\lambda + 10 = 0$$

zu lösen, aus der sich die weiteren Lösungen $\lambda_{2,3} = 1 \pm 3\,i$ ergeben. Wir stellen damit folgendes Fundamentalsystem auf:

$$y_1(x) = 1\,, \quad y_2(x) = e^x\,\sin(3\,x)\,, \quad y_3(x) = e^x\,\cos(3\,x)\,.$$

Offenbar löst $y(x) = 0$ die Differenzialgleichung mitsamt den Anfangsbedingungen $y(2) = y'(2) = y''(2) = 0$. Damit ist die einzige Lösung des Anfangswertproblems bestimmt.

5.a) Das System lautet in Gleichungsform:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2\,y_1 + y_2\,, \\ y_2' &= 2\,y_2\,. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung kann unabhängig von der ersten sofort gelöst werden:

$$y_2(x) = c_2\, e^{2\,x}\,.$$

Damit muss $y_1(x)$ die folgende inhomogene Gleichung erfüllen:

$$y_1' = 2\,y_1 + c_2\, e^{2\,x}\,.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung sieht man sofort:

$$y_{1h}(x) = c_1\, e^{2\,x}\,.$$

Durch Variation der Konstanten erhalten wir eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y_{1p}(x) = c_2\, x\, e^{2\,x}\,.$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung für y_1 lautet somit:

$$y_1(x) = (c_1 + c_2\, x)\, e^{2\,x}$$

und die allgemeine Lösung des Systems ergibt sich zu:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1 + c_2\, x)\, e^{2\,x} \\ c_2\, e^{2\,x} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2\,x} + c_2 \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} e^{2\,x}\,.$$

Daraus lässt sich leicht das folgende Fundamentalsystem entnehmen:

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2\,x}\,, \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} e^{2\,x}\,.$$

5.b) Wir berechnen die Matrixexponentialfunktion, indem wir A zunächst als Summe zweier Matrizen schreiben:

$$A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\,E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

sodass sich ergibt:

$$e^{A\,x} = e^{2\,E\,x}\, e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x}\,.$$

Mit

$$e^{2\,E\,x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2\,E)^n\, \frac{x^n}{n!} = E\, \sum_{n=0}^{\infty} (2)^n\, \frac{x^n}{n!} = E\, e^{2\,x}\,,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x} = E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \,,$$

bekommt man dann:

$$e^{A\,x} = E \left(E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \right) e^{2\,x} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{2\,x} \,.$$

Man kann auch zuerst das charakteristische polynom von A bestimmen:

$$\det(A - \lambda\,E) = (\lambda - 2)^2 = \lambda^2 - 4\,\lambda + 4 \,.$$

Anschließend betrachtet man die Gleichung zweiter Ordnung:

$$y'' - 4\,y' + 4 = 0$$

mit der allgemeinen Lösung:

$$y(x) = (c_1 + c_2\,x)\,e^{2\,x} \,.$$

Die Lösung

$$\tilde{y}_1(x) = (1 - 2\,x)\;e^{2\,x}$$

genügt den Anfangsbedingungen $\tilde{y}_1(0) = 1$, $\tilde{y}_1'(0) = 0$ und die Lösung

$$\tilde{y}_2(x) = x\,e^{2\,x}$$

genügt den Anfangsbedingungen $\tilde{y}_2(0) = 0$, $\tilde{y}_2'(0) = 1$. Damit bekommt man wieder die Matrixexponentialfunktion:

$$e^{A\,x} = \tilde{y}_1(x)\,E + \tilde{y}_2(x)\,A = \left((1 - 2\,x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{2\,x} \,.$$

Aus der Matrixexponentialfunktion entnimmt man dasselbe Fundamentalsystem wie oben.