KLAUSUR

Mathematik III für Mechatroniker

1. August 2005

(Prof. Dr. W. Koepf, Dr. M. Brede)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sind 12 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

1.) (4 Punkte) In $z_0 = 0$ bestimme man das Residuum der Funktion

$$f(z) := \frac{\sin z - z}{z^4} \ .$$

2.) (5 Punkte) Man bestätige am Beispiel der Funktion

$$f(z) = e^{5z}$$

die Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

3.) (5 Punkte) Man bestimme die allgemeine Lösung der DGl

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\sqrt{y}} \qquad (x > 0\,,\ y > 0)\,.$$

4.) (5 Punkte) Vorgelegt sei die folgende Differentialgleichung:

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\,. \quad (*)$$

a) Man löse die zugehörige homogene Gleichung allgemein.
b) Man bestimme eine spezielle Lösung von $(*)$.
c) Wie lautet die allgemeine Lösung von $(*)$?

5.) (6 Punkte) Man summiere die folgende Taylorreihe geschlossen:

$$y(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(3k)!} \ ;$$

(Hinweis: Welcher DGl genügt y? Ferner: Wie lauten $y(0)$, $y'(0)$ und $y''(0)$?)

Lösungen

1. Es ist

$$f(z) := \frac{\sin z - z}{z^4} = \frac{z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} \mp \ldots - z}{z^4} = -\frac{1}{6}\frac{1}{z} + \frac{z}{120} - \frac{z^3}{5040} \pm \ldots .$$

Also ist $Res_{z_0=0} f(z) = -\frac{1}{6}$.

2. Mit $x{:=}\text{Re}(z)$, $y{:=}\text{Im}(z)$ ist (wegen $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$) zunächst

$$u(x,y) := \text{Re}(f(z)) = e^{5x}\cos(5y) \ , \quad v(x,y) := \text{Im}(f(z)) = e^{5x}\sin(5y) \ .$$

Somit ist

$$u_x(x,y) = 5e^{5x}\cos(5y) \ , \quad u_y(x,y) = -5e^{5x}\sin(5y) \ ,$$
$$v_x(x,y) = 5e^{5x}\sin(5y) \ , \quad v_y(x,y) = 5e^{5x}\cos(5y)$$

und in der Tat also $u_x = v_y$ nebst $u_y = -v_x$.

3. Die DGl ist eine vom Bernoullischen Typ mit $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 1$ und $a = -\frac{1}{2}$. Also ist zu substituieren $y = u^{\frac{2}{3}}$, und es folgt $u' = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot u + \frac{3}{2}\cdot 1$ als (lineare!) DGl für die Hilfsfunktion u.
Allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGl: $u_{hom.} = C \cdot x^{\frac{3}{2}}$; spezielle Lösung der inhomogenen DGl: $u_{spez.} = -3x$. Somit folgt $u = C\cdot x^{\frac{3}{2}} - 3x$, d.h.

$$y = \left(C \cdot x^{\frac{3}{2}} - 3x\right)^{\frac{2}{3}} .$$

4. a) Char. Polynom: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$. Somit ist $y_{hom.} = C_1 e^{2x} + C_2 x\, e^{2x}$.
b) Da doppelte Resonanz vorliegt ($m = 2$), folgt die Existenz einer partikulären Lösung der Form $y_{spez.} = A \cdot x^2 \cdot e^{2x}$. Einsetzen liefert $A = \frac{1}{2}$.
c) Aus den Teillösungen von (a) und (b) folgt

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x\, e^{2x} + \frac{1}{2}\cdot x^2 e^{2x} .$$

5. Dreimaliges Ableiten der Reihe nach x zeigt $y''' = y$; y ist also Lösung einer linearen und homogenen DGl mit konstanten Koeffizienten; das char. Polynom lautet $\lambda^3 - 1 = (\lambda-1)(\lambda + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3})(\lambda + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3})$, d.h.

$$y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x) + C_3\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x)\right) .$$

Bestimmung von C_1, C_2, C_3 aus $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$:

$$y = \frac{1}{3}\,e^x + \frac{2}{3}\,e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) .$$