KLAUSUR

Mathematik IV (E)

1.3.2005

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 12 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $x \to y = f(x) = f(x_1, x_2)$ eine stetig differenzierbare Funktion. Bei $y \neq 0$ pflanzt sich der relative Fehler nach der folgenden Formel fort:

$$\varepsilon_y \approx \sum_{k=1}^{2} \frac{x_k}{y} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\, \varepsilon_{x_k} \,.$$

Man leite folgende Fehlerforpflanzungsformeln her:

$$y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \implies \varepsilon_y \approx \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2} \,,$$
$$y = f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2} \implies \varepsilon_y \approx \varepsilon_{x_1} - \varepsilon_{x_2} \,.$$

(6P)

2. Gegeben sei folgende Tabelle von Stützwerten und Stützstellen:

x_i	1	2	4
y_i	3	9	5

(a) Man bestimme das Interpolationspolynom $N_2(x)$ in der Form von Newton.**(3P)**
(b) Mit dem modifizierten Hornerschema bringe man $N_2(x)$ in die Normalform $N_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Mit der Methode von Aitken-Neville berechne man den Wert $N_2(3)$. **(4P)**
(c) Man berechne die Ausgleichspolynome höchstens 1. bzw. 2. Grades. **(3P)**

3. Das Runge-Kutta-Verfahren (mit der Schrittweite h, $x_i = x_0 + i\,h$) lautet:

$$k_0^{(i)} = h\,g\left(x_i, y_i^h\right) \,, \quad k_1^{(i)} = h\,g\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i^h + \frac{k_0^{(i)}}{2}\right) \,,$$

$$k_2^{(i)} = h\,g\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i^h + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right) \,, \quad k_3^{(i)} = h\,g\left(x_i + h, y_i^h + k_2^{(i)}\right) \,,$$

$$y_{i+1}^h = y_i^h + \frac{1}{6}\left(k_0^{(i)} + 2\,k_1^{(i)} + 2\,k_2^{(i)} + k_3^{(i)}\right) \,.$$

Was ergibt sich im Fall der Differenzialgleichung $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$? Man vergleiche mit der exakten Lösung und interpretiere das Ergebnis. **(8P)**

Lösungen:

1.) Wir schreiben:

$$\varepsilon_y \approx \frac{x_1}{y}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\,\varepsilon_{x_1} + \frac{x_2}{y}\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\,\varepsilon_{x_2}\,.$$

Bei der Multiplikation gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = x_2\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = x_1$$

und bei der Division:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{1}{x_2}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = -\frac{x_1}{x_2^2}\,.$$

Jetzt muss man nur noch in die Fehlerformel einsetzen.

2.) (a) Das Interpolationspolynom in der Form von Newton hat die Gestalt:

$$N_2(x) = y[x_0] + y[x_0,x_1](x-x_0) + y[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\,.$$

Die dividierten Differenzen entnimmt man dem Schema:

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & \boxed{3} & & \\
 & & \boxed{6} & \\
2 & 9 & & \boxed{-\frac{8}{3}} \\
 & & \text{-2} & \\
4 & 5 & &
\end{array}$$

und bekommt:

$$N_2(x) = 3 + 6\,(x-1) - \frac{8}{3}\,(x-1)\,(x-2)\,.$$

(b) Aus dem vollständigen modifizerten Horner-Schema entnimmt man die Koeffizienten der Normalform:

$$\begin{array}{ccc}
-\frac{8}{3} & 6 & 3 \\
 & \frac{16}{3} & -\frac{34}{3} \\
\hline
-\frac{8}{3} & \frac{34}{3} & \boxed{-\frac{25}{3}} \\
 & \frac{8}{3} & \\
\hline
-\frac{8}{3} & \boxed{14} & \\
 & & \\
\hline
\boxed{-\frac{8}{3}} & &
\end{array}$$

Die Normalform lautet somit:

$$N_2(x) = -\frac{8}{3}\,x^2 + 14\,x - \frac{25}{3}\,.$$

Die Methode von Aitken-Neville erfordert folgende Rechenschritte für $\xi = 3$:

$$\begin{aligned}
p_{11} &= \frac{\xi - x_0}{x_1 - x_0}\,p_{10} + \frac{x_1 - \xi}{x_1 - x_0}\,p_{00}\,,\\
p_{21} &= \frac{\xi - x_1}{x_2 - x_1}\,p_{20} + \frac{x_2 - \xi}{x_2 - x_1}\,p_{10}\,,\\
p_{22} &= \frac{\xi - x_0}{x_2 - x_0}\,p_{21} + \frac{x_2 - \xi}{x_2 - x_0}\,p_{11}\,,
\end{aligned}$$

die im Schema folgende Werte liefern:

$$\begin{array}{r|lcc}
1 & 3 & & \\
 & & 15 & \\
2 & 9 & & \boxed{\tfrac{29}{3}} \\
 & & 7 & \\
4 & 5 & &
\end{array}$$

Wir entnehmen den Polynomwert:

$$N_2(4) = \frac{29}{3}\,.$$

(c) Die Ausgleichsgerade erhält man zu $\psi_0(x) = c_1\,x + c_0$ aus dem System:

$$\left(\sum_{i=0}^{2} x_i^{j+k}\right)_{j,k=0,1}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{2} y_i\,x_i^0 \\ \sum_{i=0}^{2} y_i\,x_i^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 41 \end{pmatrix}\,.$$

Es ergibt sich

$$\psi_0(x) = \frac{2}{7}\,x + 5\,.$$

Das Ausgleichspolynom vom Grad 2 stimmt mit dem Interpolationspolynom überein, da jedes Fehlerquadrat Null ergibt.

3.) Die Runge-Kutta-Formeln nehmen folgende Gestalt an:

$$k_0^{(i)} = h\,f(x_i)\,,\quad k_1^{(i)} = h\,f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\,,$$

$$k_2^{(i)} = h\,f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\,,\quad k_3^{(i)} = h\,f\,(x_i + h)\;y_i^h\,,$$

$$y_{i+1}^h = y_i^h + \frac{h}{6}\,\left(f(x_i) + 2\,f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + f\,(x_i + h)\right)\,.$$

Exakte Lösung des AWP's:

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt\,.$$

Interpretation: Das Integral wird nach der Simpson-Formel ausgewertet.