KLAUSUR

Mathematik IV (E)

15.7.2002

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 10 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)

Punkte:	Note:

1. Auf einer Maschine werden Zahlen in Gleitpunktdarstellung $x = \pm a\,10^b$ erfasst. Die Stellenzahl der Mantisse a betrage fünf, und der Exponent b werde auf ein Intervall $-4 \leq b \leq 4$ eingeschränkt. Wie lautet die Gleitpunktdarstellung der Zahlen 2, 0.002 und -0.31246? Welche Zahlen können insgesamt erfasst werden? **(4P)**

2. Gegeben sei die Wertetabelle

i	0	1	2
x_i	0	1	2
y_i	4	0	1

   Man bestimme das Interpolationspolynom höchsten zweiten Grades a) mit der Methode von Lagrange und b) mit der Methode von Newton. Schließlich stelle man ein Gleichungssystem zur Herstellung des Interpolationspolynoms auf. **(4P)**

3. Gegeben sei die Wertetabelle

i	0	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3	4
y_i	-3	-2	-1	0	1

   Man bestimme die Ausgleichsgerade. Für welche Polynome sechsten Grades $\psi(x)$ wird die Summe der Fehlerquadrate $\sum_{i=0}^{4}(y_i - \psi(x_i))^2$ minimal? **(6P)**

4. Die summierte Trapezregel für das Integral $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ lautet:

$$Q_{1,N}(f) = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \ldots + f_{N-1} + \frac{1}{2}f_N\right), \quad f_k = f\left(\frac{k}{N}\right).$$

   Mit der Fehlerdarstellung $\int_0^1 f(x)\,dx - Q_{1,N}(f) = -\frac{1}{12\,N^2}f''(\eta), \eta \in [0,1]$, gebe man eine obere Abschätzung für $\left|\frac{\pi}{4} - Q_{1,N}(f)\right|$.
   (Hinweis: $f''(x) = \frac{6\,x^2-2}{(1+x^2)^3}$). **(6P)**

Lösungen

1.)

$$\begin{aligned} 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2.0000 \cdot 10^{0}\,, \\ 0.002 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2.0000 \cdot 10^{-3}\,, \\ -0.31246 \quad &\Longleftrightarrow \quad -3.1246 \cdot 10^{-1}\,. \end{aligned}$$

Man kann Zahlen der Gestalt erfassen:

$$\begin{aligned} x &= \pm\, a\, 10^{b}\,, \\ a &= a_0 + a_{-1}\,10^{-1} + a_{-2}\,10^{-2} + a_{-3}\,10^{-3} + a_{-4}\,10^{-4} \\ &= a_0\,.\,a_{-1}\,a_{-2}\,a_{-3}\,a_{-4}\,, \end{aligned}$$

mit Ziffern $a_0 \neq 0$, a_{-1}, $a_{-2}\,a_{-3}\,a_{-4}$, und $-4 \leq b \leq 4$.

2.) (a) Mit der Methode von Lagrange bekommt man:

$$L_2(x) = y_0\,L_{2,0}(x) + y_1\,L_{2,1}(x) + y_2\,L_{2,2}(x) = 4\,L_{2,0}(x) + L_{2,2}(x)$$

mit den Basispolynomen:

$$\begin{aligned} L_{2,0}(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{3}{2}\,x + 1\,, \\ L_{2,2}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}\,x\,. \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren ergibt:

$$L_2(x) = \frac{5}{2}\,x^2 - \frac{13}{2}\,x + 4\,.$$

(b) Die dividierten Differenzen ergeben sich aus dem Schema:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & \boxed{4} & & & \\ & & \boxed{-4} & & \\ 1 & 0 & & \boxed{\frac{5}{2}} & \\ & & \frac{1}{2} & & \\ 3 & 1 & & & \end{array}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} N_2(x) &= y[x_0] + y[x_0,x_1]\,(x-x_0) + y[x_0,x_1,x_2]\,(x-x_0)\,(x-x_1) \\ &= 4 - 4\,x + \frac{5}{2}\,x\,(x-1) \\ &= \frac{5}{2}\,x^2 - \frac{13}{2}\,x + 4\,. \end{aligned}$$

(c)Sei

$$p_2(x) = a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0\,.$$

Die Interpolationsbedingungen $p_2(x_i) = y_i$ sind gleichbedeutend mit:

$$\begin{aligned} a_0 &= 4\,, \\ a_0 + a_1 + a_2 &= 0\,, \\ a_0 + 2\,a_1 + 4\,a_2 &= 1\,. \end{aligned}$$

Die Lösung des Systems lautet

$$a_0 = 4\,, \qquad a_1 = -\frac{13}{2}\,, \qquad a_2 = \frac{5}{2}\,,$$

und somit somit:

$$p_2(x) = \frac{5}{2}\,x^2 - \frac{13}{2}\,x + 4\,.$$

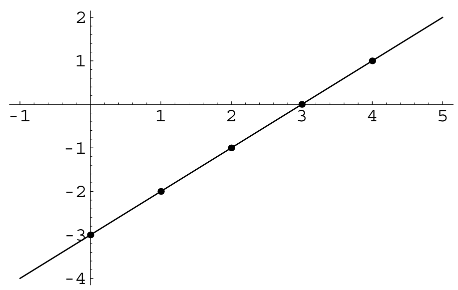
3.) Man kann die Ausgleichsgerade durch Lösen der Normalgleichungen bekommen:

$$\sum_{k=0}^{1}\left(\sum_{i=0}^{4} x_i^{j+k}\right) c_k^{(0)} = \sum_{i=0}^{4} y_i\,x_i^j\,, \quad j = 0,1\,.$$

Andererseits sieht man sofort (aus einer Skizze), dass die gegebenen Punkte auf der Geraden:

$$y = x - 3$$

liegen. Diese Gerade stellt somit die Ausgleichsgerade dar.



Die gegebenen Stützpunkte mit der Ausgleichsgeraden

Bei dem vorliegenden Ausgleichsproblem beträgt das Minimum null. Alle Polynome $p(x)$ höchstens sechsten Grades erreichen dieses Minimum genau dann, wenn sie an den Stützstellen mit den Stützwerten übereinstimmen. Das heißt $p(x) - (x - 3)$ stellt ein Polynom höchstens sechsten Grades dar mit Nullstellen x_j. Hieraus ergibt sich:

$$p(x) = x - 3 + \Pi_{j=0}^{4}(x - x_j)\,(\alpha\, x + \beta)\,.$$

Man kann auch anders vorgehen. Die Interpolationsaufgabe liefert genau ein Polynom $p_4(x)$ höchstens vierten Grades, welches an den Stützstellen die Stützwerte annimmt. Die Ausgleichsgerade stimmt hier mit diesem Interpolationspolynom überein: $p_4(x) = x - 3$. Alle Polynome höchstens sechsten Grades der Gestalt

$$p(x) = x - 3 + \Pi_{j=0}^{4}(x - x_j)\,(\alpha\, x + \beta)$$

besitzen ebenfalls die Interpolationseigenschaft.
4.) Die summierte Trapezregel für das Integral über die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

mit

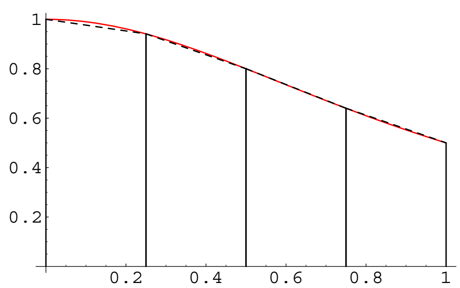
$$f_k = f\left(\frac{k}{N}\right)$$

lautet:

$$Q_{1,N}(f) = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{2}\, f_0 + f_1 + \ldots + f_{N-1} + \frac{1}{2}\, f_N\right)\,.$$

Es ergibt sich folgender Wert für $N = 4$:

$$Q_{1,4}(f) \quad = \quad \frac{5323}{6800} \approx 0.782794\,.$$



Summierte Trapezregel für die Funktion: $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ mit $N = 4$

Wir haben zunächst folgende Abschätzung des Quadraturfehlers:

$$\left| \int\limits_0^1 f(x)\,dx - Q_{1,N}(f) \right| \le \frac{1}{12\,N^2} \max_{x \in [0,1]} |f''(x)| \,.$$

Für das Integral bekommt man den exakten Wert:

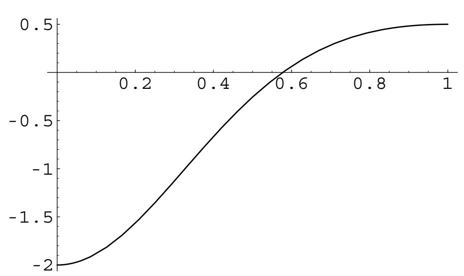
$$\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} \,.$$

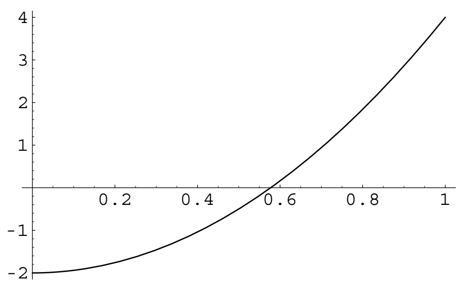
Als zweite Ableitung des Integranden erhält man:

$$f''(x) = \frac{6\,x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \,.$$

Der Zähler ist streng monoton wachsend und nimmt Werte zwischen -2 und 4 an. Der Nenner ist stets größer oder gleich als eins. Insgesamt ergibt sich die Abschätzung:

$$\left| \frac{\pi}{4} - Q_{1,N}(f) \right| \le \frac{1}{12\,N^2} \cdot 4 = \frac{1}{3\,N^2} \,.$$





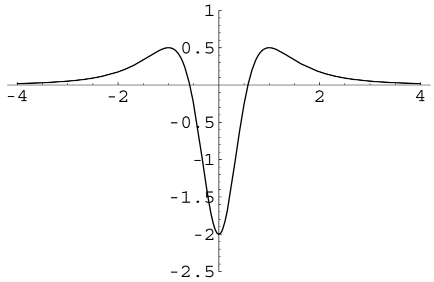
Die Funktion $f''(x) = \frac{6\,x^2-2}{(1+x^2)^3}$ (links) und die Funktion $x \mapsto 6\,x^2 - 2$ (rechts) im Intervall $[-1, 1]$

Man kann auch die Extremalstellen von $f''(x)$ bestimmen:

$$f'''(x) = \frac{12\,x\,(1+x^2) - 6\,x\,(6\,x^2-2)}{(1+x^2)^4} = \frac{x\,(-24\,x^2+24)}{(1+x^2)^4} \,.$$

Die Funktion $f''(x)$ kann also folgende Extremalstellen (in ganz $\mathbb{R}$) besitzen:

$$x = 0\,, \quad x = \pm 1\,.$$



Die Funktion
$f''(x) = \frac{6\,x^2-2}{(1+x^2)^3}$

Man erkennt durch Nachrechnen, dass $x = 0$ ein Minimum darstellt und die Beträge von $f''(x)$ durch $|f''(0)| = 2$ nach oben beschränkt werden. Daraus folgt:

$$\left|\frac{\pi}{4} - Q_{1,N}(f)\right| \leq \frac{1}{12\,N^2} \cdot 4 = \frac{1}{6\,N^2}\,.$$