Klausur Mathematik I

(E-Techniker/Mechatroniker/Informatiker/W-Ingenieure)

3. September 2007

(Hans-Georg Rück)

Aufgabe 1 (6 Punkte):

a) Berechnen Sie alle komplexen Zahlen z mit der Eigenschaft

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2} \text{ und } (z-1)\cdot(\bar{z}-1) = 1 \, .$$

Geben Sie die Lösungen in karthesischen Koordinaten (Real- und Imaginärteil) an.

b) Berechnen Sie alle komplexen Zahlen, deren dritte Potenz gleich der komplexen Zahl i ($i^2 = -1$) ist.
Geben Sie die Lösungen in Polarkoordinaten (Winkel und Betrag) an.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

a) Die Ebene E_1 gehe durch die drei Punkte $(1,0,-1)$, $(2,1,0)$ und $(2,0,-2)$. Auf der Ebene E_2 mit dem Normalenvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liege der Punkt $(1,0,0)$.
Berechnen Sie die Schnittgerade $g = E_1 \cap E_2$ in Parameterform.

b) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + ax_2 + 6x_3 &= 9 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= -4 \end{aligned}$$

in den Unbekannten x_1, x_2 und x_3. Dabei ist a eine reelle Konstante.
Berechnen Sie die Konstante a, so dass dieses Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

Aufgabe 3 (10 Punkte):

Betrachten Sie für ein Paar reeller Konstanten (a, b) die Funktion

$$f_{(a,b)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f_{(a,b)}(x) = (x + a)\, e^{bx} \ .$$

a) Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung von $f_{(a,b)}$.

b) Wie viele Wendepunkte kann $f_{(a,b)}$ höchstens haben? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Finden sie mindestens ein Paar (a, b), so dass die Funktion $f_{(a,b)}$ bei $x = 1$ ein lokales Maximum hat. Erklären Sie Ihr Vorgehen.

d) Berechnen Sie die beiden Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} f_{(1,2)}(x) \text{ und } \lim_{x\to\infty} f_{(1,-2)}(x).$$

Aufgabe 4 (8 Punkte):

a) Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{x + 5}{x^2 + 2\,x + 1} \ .$$

mittels Partialbruchzerlegung.

b) Berechnen Sie die Taylorreihe um den Punkt $x_0 = 0$ von

$$f(x) = \frac{1}{2 - 3\,x} \ .$$

Aufgabe 5 (8 Punkte):

a) Berechnen Sie (durch Anwendung einer geeigneten Substitution) das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{\pi-2}} \frac{1}{(x-1)^2} \cos\!\left(\frac{x}{x-1}\right) dx \ .$$

b) Berechnen Sie (durch Anwendung von partieller Integration) das bestimmte Integral

$$\int_0^{e} x^2\, e^x \, dx \ .$$

Lösungen:

1. a) Wir schreiben $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann lesen sich die Eigenschaften als

$$x = \frac{1}{2} \text{ und } (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Setzen wir $x = \frac{1}{2}$ in die zweite Gleichung ein und lösen die quadratische Gleichung in y, so erhalten wir $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Es ergeben sich somit die beiden Lösungen

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ und } z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) Wir schreiben i in Polarkoordinaten $(r = 1, \varphi = \frac{\pi}{2})$: $i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$. Somit erhalten wir gemäß der Vorlesung die drei Lösungen

$$z_k = e^{i(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3})} \quad \text{mit } k = 0, 1, 2.$$

2. a) E_1 lautet in Parametrform

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

E_2 lautet in impliziter Form

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 - 1 - x_2 = 0 \right\}.$$

Setzen wir x_1, x_2, x_3 von E_1 in die Gleichung von E_2 ein, so erhalten wir

$$(1 + \lambda + \mu) - 1 - \lambda = 0, \text{ also } \mu = 0.$$

Die Geradengleichung lautet dann

$$g = E_1 \cap E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 2 & a & 6 & | & 9 \\ -1 & -2 & -3 & | & -4 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gauß-Algorithmus formen wir dies um zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & a-4 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass dieses lineare Gleichungssystem genau dann nicht lösbar ist, wenn $a - 4 = 0$ ist. Somit ist die Lösung $a = 4$.

3. a) Mit der Produkt- und der Kettenregel berechnen wir

$$\begin{aligned} f'_{(a,b)}(x) &= e^{bx}(1+bx+ba) \text{ und} \\ f''_{(a,b)}(x) &= e^{bx}(2b+b^2x+b^2a). \end{aligned}$$

b) Wenn x ein Wendepunkt ist, dann muss $f''_{(a,b)}(x) = 0$ sein. Also muss $2b+b^2+x+b^2a = 0$ sein. Es gibt aber höchstens ein solches x, da dies ein Polynom vom Grad ≤ 1 in x ist. Also gibt es höchstens einen Wendepunkt.

c) Hinreichende Bedingung für ein lokales Maximum bei $x = 1$ sind $f'_{(a,b)}(1) = 0$ und $f''_{(a,b)}(1) < 0$. Dies bedeutet aber gerade

$$1 + b + ba = 0 \text{ und } 2b + b^2 + b^2a < 0. \tag{1}$$

Lösen wir die erste Gleichung nach b auf (falls $a \neq -1$), so erhalten wir $b = \dfrac{-1}{1+a}$. Setzen wir dies in die Ungleichung ein und multiplizieren sie dann mit $(1+a)^2$, so bekommen wir

$$-2(1+a) + 1 + a < 0 \text{ beziehungsweise } a > -1.$$

Somit folgt, dass wenn $a > -1$ und $b = \dfrac{-1}{1+a}$, dann hat $f_{(a,b)}$ bei 1 ein lokales Maximum. Natürlich können wir auch ein Paar (a,b) erraten, dass (1) erfüllt, etwa $(a,b) = (0,-1)$.

d) Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} f_{(1,2)}(x) = \lim_{x\to\infty} (x+1)e^{2x} = \infty \cdot \infty = \infty.$$

Ausserdem

$$\lim_{x\to\infty} f_{(1,-2)} = \lim_{x\to\infty} (x+1)e^{-2x} = „\infty \cdot 0\text{“}.$$

Hier müssen wir also l'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to\infty} f_{(1,-2)} = \lim_{x\to\infty} (x+1)e^{-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0.$$

4. (a) Es ist $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Also machen wir den Ansatz

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{x+5}{(x+1)^2}.$$

Wir multiplizieren mit $(x+1)^2$ und erhalten $A(x+1) + B = x + 5$. Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $A = 1$ und $B = 4$ und somit

$$\frac{x+5}{x^2+2x+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2}.$$

Laut Vorlesung ist dann die Stammfunktion

$$\int \frac{x+5}{x^2+2x+1} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2} \right) dx = \ln|x+1| - \frac{4}{x+1} + c.$$

(b) Wir benutzen die Geometrische Reihe $\frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{\infty} u^k$ und formen um:

$$\frac{1}{2-3x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{2}x}.$$

Mit $u = \frac{3}{2}x$ erhalten wir

$$\frac{1}{2-3x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{2}x} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}x\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^k x^k.$$

5. (a) Wir substituieren: $u = \frac{x}{x-1}$ und erhalten $\frac{du}{dx} = \frac{-1}{(x-1)^2}$, somit $dx = -(x-1^2)du$. Für die Grenzen erhalten wir 0, beziehungsweise $\pi/2$. Wir setzen dies alles ein und erhalten

$$\int_0^{\frac{\pi}{\pi-2}} \frac{1}{(x-1)^2}\cos\left(\frac{x}{x-1}\right)dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(u)du = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(0) = -1.$$

(b) Wir berechnen die Stammfunktion von x^2e^x durch zweimalige Anwendung der partiellen Integration:

$$\begin{aligned}
\int x^2e^x dx &= x^2e^x - \int 2xe^x dx \\
&= x^2e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x dx\right) \\
&= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x \\
&= (x^2-2x+2)e^x
\end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\int_0^e x^2e^x dx = (e^2-2e+2)e^e - (0^2+2\cdot 0+2)e^0 = (e^2-2e+2)e^e - 2.$$