KLAUSUR

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

25.2.2004

W. Strampp

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 9 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$x\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0\,, \quad u(1,s) = 1 - s\,.$$

Man gehe auf erstens auf direktem Weg vor und zweitens über die allgemeine Lösung.
(6P)

2. Man bestimme die Charakteristiken der Differenzialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

und stelle eine parabolische Normalform her. Wie lautet die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung?
(6P)

3. Durch Separation $u(x,t) = f(x)\,g(t)$ bestimme man eine Lösung der Differenzialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{k}\,\frac{\partial u}{\partial t} + u\,,$$

welche die Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = a\,e^{-k\,t}\,, \quad u(l,t) = 0\,,$$

erfüllt. ($k > 0$, $l > 0$, $a < 0$, sind Konstante).
(6P)

Lösungen

1.) Das Charakteristische System

$$\frac{dx}{d\epsilon} = x\,, \quad \frac{dy}{d\epsilon} = 1\,,$$

besitzt die Lösung:

$$x = x_0\, e^{\epsilon}\,, \quad y = y_0 + \epsilon\,.$$

Wir setzen die Anfangskurve ein

$$x = e^{\epsilon}\,, \quad y = s + \epsilon\,,$$

und lösen auf ($x > 0$):

$$\epsilon = \ln(x)\,, \quad s = y - \ln(x)\,.$$

Hieraus ergibt sich die Lösung des AWP's:

$$u(x,y) = \overline{u}(s(x,y)) = 1 - y + \ln(x)\,.$$

Eliminiert man aus dem charakteristische System den Parameter ϵ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\,,$$

so bekommt man die Lösung

$$y = \ln(x) + c\,,$$

und daraus das erste Integral:

$$c = y - \ln(x)\,.$$

Die allgemeine Lösung der partiellen Differenzialgleichung lautet damit:

$$u_A(x,y) = f(y - \ln(x))\,.$$

Die Funktion f spezialisiert man mit der Anfangsbedingung:

$$u(1,s) = f(s) = 1 - s\,.$$

Damit bekommt man die Lösung des AWP's wir oben.

2.) Die gegebene Differenzialgleichung $a = b = c = 1$ ist parabolisch: $b^2 - a\,c = 0$. Wir setzen $\phi(x, y) = x$ und berechnen $\psi(x, y)$ aus:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{b}{a}\,\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0\,.$$

Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} = 1$$

und besitzt die allgemeine Lösung:

$$y = x + c\,.$$

Wir können also wählen:

$$\psi(x, y) = y - x\,.$$

Mit der Koordinatentransformation:

$$\tilde{x} = x\,, \quad \tilde{y} = y - x\,,$$

und

$$\tilde{u}(x, y - x) = u(x, y)$$

ergibt sich folgende parabolische Normalform:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} = 0\,.$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(\tilde{y})\,\tilde{x} + g(\tilde{y})\,.$$

Hieraus ergibt sich die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung:

$$u(x, y) = f(y - x)\,x + g(y - x)\,.$$

3.) Wir setzen den Ansatz

$$u(x, t) = f(x)\,g(t)$$

in die Gleichung ein:

$$f'' g = \frac{2}{k} f g^{\cdot} + f g , \quad {}' = \frac{d}{dx} , {}^{\cdot} = \frac{d}{dt} .$$

Wir separieren:

$$\frac{f''}{f} = \frac{2}{k} \frac{g^{\cdot}}{g} + 1 = c .$$

Die zeitliche Gleichung:

$$\frac{g^{\cdot}}{g} = (c-1) \frac{k}{2}$$

besitzt die allgemeine Lösung:

$$g(t) = \gamma \, e^{(c-1) \frac{k}{2} t} .$$

Die Randbedingung ($x = 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = f'(0) \, \gamma \, e^{(c-1) \frac{k}{2} t} = a \, e^{-k t}$$

kann nur erfüllt werden, wenn gilt:

$$(c-1) \frac{k}{2} = -k \quad \Longrightarrow \quad c = -1 .$$

Nun lösen wir die räumliche Gleichung:

$$f'' + f = 0$$

und bekommen:

$$f(x) = A \, \cos(x) + B \, \sin(x) .$$

Also haben wir bisher:

$$u(x,t) = (A \, \cos(x) + B \, \sin(x)) \, e^{-k t} .$$

Die Randbedingung ($x = l$) erfordert:

$$A \, \cos(l) + B \, \sin(l) = 0 .$$

Die Randbedingung ($x = 0$) führt auf die weitere Einschränkung:

$$\frac{d}{dx}(A \, \cos(x) + B \, \sin(x))|_{x=0} = -A \, \sin(0) + B \, \cos(0) = B = a .$$

Die Konstanten A und B sind dadurch eindeutig festgelegt:

$$A = -a \, \tan(l) ,$$

wenn $\cos(l) \neq 0$ ist.