KLAUSUR

Partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

23.2.2006

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Versuch–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sollten 12 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)

Punkte:	Note:

1. Bestimmen Sie den Typ der Differenzialgleichung

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

Wie lauten die Charakteristiken? Mit welchen Koordinaten kann man die Gleichung auf Normalform transformieren?
(8P)

2. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$u(0,t) = u(l,t) = 0\,, \quad u(x,0) = f(x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)\,,$$

für die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

mit der d' Alembertschen Methode. Dabei sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{l} & , \quad 0 \le x \le \frac{l}{2}\,, \\ \\ \frac{l-x}{l} & , \quad \frac{l}{2} \le x \le l\,, \end{cases}$$

und $g(x) = 0$. Welche Periode in der Zeitvariablen besitzt die Lösung $u(x,t)$? Welchen Wert ergibt $u\left(x, \frac{l}{2\,c}\right)$?
(8P)

3. Wir betrachten die Maxwell-Gleichungen für $E(x,y,z,t)$, $H(x,y,z,t)$:

$$(1) \quad \text{rot}E + \mu\,\frac{\partial H}{\partial t} = 0\,, \quad (2) \quad \text{rot}H - \epsilon\,\frac{\partial E}{\partial t} - \sigma\,E = 0$$

mit Konstanten $\mu\,\epsilon\,\sigma$. Wir geben die Anfangsbedingungen div $E(x,y,z,0) = 0$, div $H(x,y,z,0) = 0$ vor. Zeigen Sie: div $E(x,y,z,t) = 0$, div $H(x,y,z,t) = 0$. Hinweis: Wenden Sie den Divergenzoperator auf (1) und (2) an und beachten Sie div rot $= 0$ und div $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial \text{div}\,H}{\partial t}$.
(8P)

Lösungen

1.) Wir haben die Koeffizienten: $a = -1\,, b = \frac{1}{2}\,, c = 1$, somit

$$b^2 - a\,c = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} > 0\,.$$

Die Gleichung ist hyperbolisch. Die Charakteristiken ergeben sich aus der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - a\,c}}{a} = -\frac{1}{2}\,(1 \pm \sqrt{5})\,.$$

Wir bekommen Charakteristiken:

$$y = -\frac{1}{2}\,(1 - \sqrt{5})\,x + c_1\,, \quad y = -\frac{1}{2}\,(1 + \sqrt{5})\,x + c_2\,.$$

Die Koordinatentransformation

$$\tilde{x} = y + \frac{1}{2}\,(1 - \sqrt{5})\,x\,, \quad \tilde{y} = y + \frac{1}{2}\,(1 + \sqrt{5})\,x\,,$$

überführt die Gleichung in die hyperbolische Normalform:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} = 0\,.$$

2.) Nach der Methode von d' Alembert wird die Funktion $f(x)$ zunächst ungerade auf das Intervall [-l,0] fortgesetzt und dann $2l$-periodisch auf $\mathbb{R}$. Die Lösung lautet:

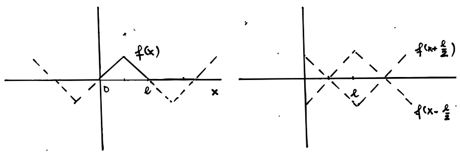
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\,(f(x + c\,t) + f(x - c\,t))\,.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} u\left(x, t + \frac{2\,l}{c}\right) &= \frac{1}{2}\,(f(x + c\,t + 2\,l) + f(x - c\,t - 2\,l)) \\ &= \frac{1}{2}\,(f(x + c\,t) + f(x - c\,t)) = u(x,t)\,. \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie von $f(x)$ gilt:

$$u\left(x, \frac{l}{2\,c}\right) = \frac{1}{2}\,\left(f\left(x + \frac{l}{2}\right) + f\left(x - \frac{l}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\,\left(f\left(\frac{l}{2} + x\right) - f\left(\frac{l}{2} - x\right)\right) = 0\,.$$



Die Funktion $f(x)$: periodische Fortsetzung und Verschiebung

3.) Wir wenden den Divergenzoperator auf (1) an und bekommen wegen div rot $=$ 0:

$$\mu \frac{\partial \mathrm{div}\, H}{\partial t} = 0\,.$$

Die Anfangsbedingung div $H(x,y,z,0) = 0$ liefert:

$$\mathrm{div}\, H(x,y,z,t) = 0\,.$$

Wir wenden den Divergenzoperator auf (2) an und bekommen analog

$$\epsilon \frac{\partial \mathrm{div}\, E}{\partial t} - \sigma\, \mathrm{div}\, E = 0\,.$$

Wegen der Anfangsbedingung div $E(x,y,z,0) = 0$ folgt wieder div $E(x,y,z,t) =$ 0.