

Aufgabe 1

Seien im Folgenden A und B beliebige vorgegebene Mengen.

Falls ein Element a in A enthalten ist, schreiben wir $a \in A$.

Ist jedes Element a aus A auch in B enthalten, dann nennen wir A eine *Teilmenge* von B und bezeichnen dies mit $A \subset B$.

Die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind, nennen wir die *Schnittmenge* von A und B und wir bezeichnen diese Menge mit $A \cap B$.

Die Menge $A \cup B$ enthält alle Elemente, die in A oder in B enthalten sind, und heißt *Vereinigungsmenge* von A und B . Gegeben seien jetzt die Mengen

$$P = \{-5, 4, \sqrt{7}, -\frac{3}{4}, 97\} \quad Q = \{-18, 2, \sqrt{5}, 97, \sqrt{7}, \frac{3}{5}\}$$

$$R = \{x \in \mathbb{R}, |x - 2| \leq 3\} \quad S = \{x \in \mathbb{R}, |x - 1| \leq \frac{2}{3}\}$$

(a) Geben Sie die folgenden Mengen an:

$$P \cap Q \quad \text{und} \quad P \cup Q$$

(b) Stellen Sie R und S als Intervall dar und bestimmen Sie die Mengen $R \cap S$ und $R \cup S$.

(c) Gilt $P \subset Q$ beziehungsweise $S \subset R$? Begründen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 2

(a) Schreiben Sie folgende Ausdrücke mit Hilfe des Summenzeichens \sum bzw. Produktzeichens \prod

$$(i) \quad A_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n + 1)^3 \quad (ii) \quad B = 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14 \cdot \dots \cdot 353$$

(b) Man berechne die Summe aller ganzzahligen Vielfachen von 7, die zwischen 1 und 1000 liegen.

$$(\text{Hinweis: } 1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2})$$

(c) Sei die Summe $S_n = \sum_{k=0}^n q^k$ gegeben. Beweisen Sie durch Induktion: $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3

(a) Wie muss man α und β wählen, damit die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 + \alpha \\ 4\beta \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 - 3\alpha \\ -2 - 3\beta \end{pmatrix}$ gleich sind?

(b) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, der folgende Gleichung erfüllt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} - 4 \vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie Skalare α und β so, dass für die Vektoren

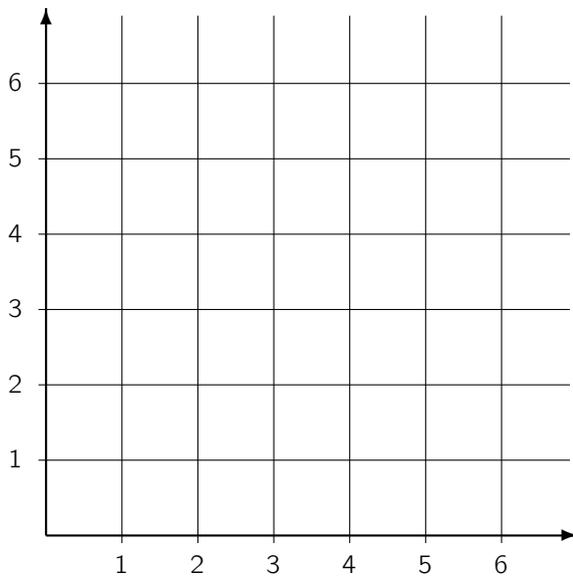
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

(2 Punkte)

(b) Es seien im kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A = (1, 5)$ und $C = (6, 2)$ gegeben.



(a) Zeichnen Sie in das Koordinatensystem die Punkte A und C ein, sowie das Quadrat $ABCD$, welches die Strecke \overline{AC} als Diagonale enthält.

(b) Wie groß ist der Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$?

(c) Geben Sie die Vektoren \vec{CA} und \vec{BE} an, wobei E der Mittelpunkt der Strecke \overline{BD} ist.

(3 Punkte)

Abgabetermin: Montag, 1.11.2010 um 10 Uhr vor dem Beginn der Vorlesung.

WICHTIG: Aufgabe 4 muss sorgfältig bearbeitet und abgegeben werden. Geben Sie auf jedem Blatt Ihren **Namen, Vornamen, Matrikelnummer, Studiengang** sowie Ihre **Gruppennummer** an. Weitere Informationen auf http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf/Elektrotechnik/lin_alg-WS10.html