Prof. Dr. W. Koepf
Dr. E. Nana Chiadjeu, Dr. T. Sprenger

Lineare Algebra für Elektrotechniker/Informatiker Mechatroniker/Wirtschaftsingenieure

UNIKASSEL VERSITÄT

Übungsblatt 10 — **17.01.2011**

Aufgabe 1 Gegeben seien die Abbildungen

$$f_1, f_2 : \{1, \ldots, 10\} \to \{1, \ldots, 10\} ,$$

$$f_3 : \{1, \ldots, 10\} \to \{1, \ldots, 20\}$$

definiert durch die folgende Tabelle:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_1(x)$	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3
$f_2(x)$	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5
$f_3(x)$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Sind die Abbildungen f_1, f_2, und f_3 injektiv? bzw. surjektiv? bzw. bijektiv?

Aufgabe 2 Bestimmen Sie den Rang der folgenden 7×4-Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 3 Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wird für alle Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -4x + 6y \end{pmatrix} .$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Berechnen Sie $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und leiten Sie die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basen her.

(c) Bestimmen Sie den Kern von f (Nullraum) und bestätigen Sie die Dimensionsformel.

(d) Ist f injektiv?

Aufgabe 4 Gegeben sei im $\mathbb{R}^2$ die Basis

$$B = \left\{ \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} .$$

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei durch folgende Festlegung gegeben:

$$f(\vec{u}) = \vec{u} - \vec{v}, \quad f(\vec{v}) = \vec{v} . \tag{1}$$

Ziel ist es, die Matrix A mit der Eigenschaft $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ zu bestimmen, d.h die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basis.

(i) Bestimmen Sie die Matrix von f bezüglich der Basis B.

(bitte wenden)

(ii) Schreiben Sie die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ mit Hilfe der Vektoren $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^2$.

(iii) Zeigen Sie, dass $f(\vec{e_1})$ und $f(\vec{e_2})$ Lösungen des folgenden Gleichungssystems S sind:

$$\begin{aligned} 2f(\vec{e_1}) - 5f(\vec{e_2}) &= 3\vec{e_1} - 8\vec{e_2} \\ -f(\vec{e_1}) + 3f(\vec{e_2}) &= -\vec{e_1} + 3\vec{e_2} \end{aligned}$$

(Man kann dafür (ii) und (1) benutzen)

(iv) Lösen Sie S und leiten Sie heraus die Matrix A her.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

(a) Gegeben sei die Abbildung g, die jedem Studenten der Universität Kassel eine Matrikelnummer zuordnet, die zwischen 10 000 000 und 99 999 999 liegt, d.h:

$$\begin{aligned} g : \text{Menge der Studenten der Universität Kassel} &\to \{10\,000\,000, \ldots, 99\,999\,999\} \\ x &\mapsto \text{Matrikelnummer(x)} \end{aligned}$$

Ist g injektiv? surjektiv? bijektiv?

(b) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wird für alle Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(i) Wie lautet die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^3$ und des $\mathbb{R}^2$?

(ii) Bestimmen Sie den Kern von f (Nullraum) und bestätigen Sie die Dimensionsformel.

(iii) Ist f injektiv?

(c) Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ die Basis

$$B = \left\{ \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch folgende Festlegung gegeben:

$$f(\vec{v_1}) = -\vec{v_1} + \vec{v_3}, \quad f(\vec{v_2}) = 3\vec{v_2} - 6\vec{v_3}, \quad f(\vec{v_3}) = \vec{v_1} + \vec{v_2} - 3\vec{v_3}\,. \tag{2}$$

Ziel ist es, die Matrix A mit der Eigenschaft $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ zu bestimmen, d.h die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basis.

(i) Bestimmen Sie die Matrix von f bezüglich der Basis B.

(ii) Schreiben Sie die Vektoren $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ und $\vec{v_3}$ mit Hilfe der Vektoren $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_1}$ der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.

(iii) Zeigen Sie, dass $f(\vec{e_1})$, $f(\vec{e_2})$ und $f(\vec{e_1})$ Lösungen des folgenden Gleichungssystems S sind:

$$\begin{aligned} f(\vec{e_1}) + f(\vec{e_2}) - f(\vec{e_3}) &= -\vec{e_1} - \vec{e_2} + 2\vec{e_3} \\ f(\vec{e_1}) + f(\vec{e_3}) &= 3\vec{e_1} - 3\vec{e_3} \\ f(\vec{e_3}) &= 2\vec{e_1} + \vec{e_2} - 3\vec{e_3} \end{aligned}$$

(Man kann dafür (ii) und (2) benutzen)

(iv) Lösen Sie S und leiten Sie heraus die Matrix A her.

Abgabetermin: Montag, 24.01.2011 um 10:15 Uhr vor dem Beginn der Vorlesung im Hörsaal.
WICHTIG: Aufgabe 5 muss sorgfältig bearbeitet und abgegeben werden. Geben Sie auf jedem Blatt Ihren **Namen**, **Vornamen**, **Matrikelnummer**, **Studiengang** sowie Ihre **Gruppennummer** an. Weitere Informationen auf `http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf/Elektrotechnik/lin_alg-WS10.html`