

Übungsblatt 11

Aufgabe 1

- (a) Wie viele Permutationen gibt es in S_8 ?
(b) Sei in S_8 die folgende Permutation π gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 3 & 6 & 1 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Man bestimme Ihr Signum durch Angabe der Fehlstände. Ferner gebe man die inverse Permutation an.

- (c) Man berechne die Verkettung $\pi_{23} \circ \pi_{13}$

$$\pi_{23} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \pi_{13} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem für die Unbekannten x_1, x_2 und x_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & -2 & b \\ -1 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a, b, c_1 und c_2 sind beliebige gewählte reelle Zahlen).

Unter welcher Bedingung ist das System

- (a) eindeutig lösbar?
(b) nicht lösbar?
(c) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar?

Aufgabe 3

Bezüglich der Basen $B_1 = \left\{ \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ im $\mathbb{C}^2$ und $B_2 = \left\{ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

im $\mathbb{C}^3$ werde eine lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ durch die folgende Matrix beschrieben:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & i \\ 2 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Wie lautet die Matrix von f bezüglich der Basen

$$\tilde{B}_1 = \left\{ \vec{\tilde{a}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{\tilde{a}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} \right\} \text{ im } \mathbb{C}^2 \text{ und } \tilde{B}_2 = \left\{ \vec{\tilde{b}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\tilde{b}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2i \end{pmatrix}, \vec{\tilde{b}}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ im } \mathbb{C}^3?$$

(Es genügt die Matrix in Produktform anzugeben, also keine Berechnung!)

(Bitte wenden)

Aufgabe 4 (5 Punkte)

(a) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem für die Unbekannten x_1, x_2, x_3 und x_4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 3 & a+1 & a+7 & 5a \\ a & 2 & 1 & 4-2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

(a, b, c sind beliebige gewählte reelle Zahlen).

Unter welcher Bedingung ist das System

- (i) eindeutig lösbar?
 - (ii) nicht lösbar?
 - (iii) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar?
- (b) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^3$ wird durch die folgende Matrix A von f bezüglich der kanonischen Basis (d. h. die Matrix A mit der Eigenschaft $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{C}^4$) gegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 2 & -1 \\ i & -1 & 2i & -i \\ -2 & 2i & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Basis des Kerns sowie eine Basis des Bildes von f , und bestätigen Sie die Dimensionsformel.

Abgabetermin: Montag, 31.01.2011 um 10:15 Uhr vor dem Beginn der Vorlesung im Hörsaal.

WICHTIG: Aufgabe 4 muss sorgfältig bearbeitet und abgegeben werden. Geben Sie auf jedem Blatt Ihren **Namen, Vornamen, Matrikelnummer, Studiengang** sowie Ihre **Gruppennummer** an. Weitere Informationen auf http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf/Elektrotechnik/lin_alg-WS10.html