

Übungszettel 12

67. Sei  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ , sei weiter  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  die Einheitsmatrix und  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  die Nullmatrix. Für welche Zahlen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt

$$A^2 + \alpha A + \beta E = O ?$$

68. Von welcher Form ist eine  $2 \times 2$ -Matrix  $M$ , für welche  $M^2 = O$  gilt?  
Matrizen mit der Eigenschaft  $M^2 = O$  heißen nilpotent.
69. (a) Beweisen Sie das Additionstheorem für die Kosinusfunktion, indem Sie die Funktion

$$H(x) := \cos x \cdot \cos(x_0 - x) - \sin x \cdot \sin(x_0 - x)$$

differenzieren.

- (b) Gewinnen Sie mittels (a) auch das Additionstheorem für die Sinusfunktion.

70. Bestimmen Sie  $\int \frac{1}{x^4 + 4} dx$ . Verwenden Sie hierbei die Faktorisierung des Nenners (Beweis!)

$$x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2).$$

71. (a) Bestimmen Sie mit partieller Integration  $\int \cos^2 t dt$ . Verwenden Sie die Beziehung  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ .
- (b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

mit der Substitution  $x = \sin t$ .