

Geometrische Funktionentheorie

Wolfram Koepf, Universität Kassel

Sommersemester 2009

1 Einführung

In diesem Abschnitt wollen wir die notwendigen Hilfsmittel aus der Funktionentheorie wiederholen. Wir werden uns in dieser Vorlesung hauptsächlich mit *analytischen Funktionen* $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ beschäftigen, wobei

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

die *Einheitskreisscheibe* bezeichne. Mit

$$\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$$

bezeichnen wir konzentrische Kreisscheiben und mit

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

bezeichnen wir die *erweiterte komplexe Ebene*. *Meromorphe Funktionen* können auch den Wert ∞ annehmen. Die entsprechenden Urbilder nennen wir *Pole*. Die Menge $\hat{\mathbb{C}}$ kann in geeigneter Weise metrisiert werden (Stichwort: *Riemannsche Zahlenkugel*). Ein *Gebiet* bezeichnet eine offene und (weg)zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$ oder $\hat{\mathbb{C}}$.

Wir erinnern an die folgenden Eigenschaften analytischer Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, wobei D ein Gebiet bezeichne:¹

1. Analytische Funktionen sind *komplex differenzierbar* in der Umgebung jedes Punktes $z \in D$.
2. *Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen*: Die Funktionen $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ und $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ erfüllen die partiellen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x .$$

3. *Cauchyscher Integralsatz*: Ist D sternförmig (oder einfach zusammenhängend, s. Definition 22 auf S. 17), dann gilt: Integrale über geschlossene Kurven $\gamma \subset D$ sind 0:

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0 .$$

4. *Cauchysche Integralformel*: Unter den Bedingungen des Cauchyschen Integralsatzes gilt: Für eine einfach in mathematisch positiver Richtung² durchlaufende Kurve $\gamma \subset D$ ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta .$$

¹Eigenschaften, die für uns nicht wichtig sind (z. B. *Residuensatz* etc.) führen wir nicht auf.

²also gegen den Uhrzeigersinn

5. *Cauchysche Integralformel für die Ableitung*: Unter den Bedingungen des Cauchyschen Integralsatzes gilt: Für eine einfach in mathematisch positiver Richtung durchlaufende Kurve $\gamma \subset D$ sowie $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ ist

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

6. Analytische Funktionen sind also unendlich oft differenzierbar.
 7. Analytische Funktionen lassen sich sogar durch konvergente *Potenzreihen* darstellen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist größtmöglich.

8. *Satz von Liouville*: Eine in der ganzen komplexen Ebene analytische und beschränkte Funktion ist konstant.
 9. Analytische Funktionen mit $f'(z) \neq 0$ sind *winkeltreu*. Kleine Kreise werden auf kleine Fast-Kreise abgebildet mit Drehwinkel $\arg f'(z)$ und Vergrößerungsfaktor $|f'(z)|$. Dies ist eine direkte Konsequenz der linearen Approximierbarkeit

$$f(\zeta) = f(z) + f'(z)(\zeta - z) + O(\zeta - z)^2.$$

10. *Satz der Gebietstreue*: Nicht konstante analytische Funktionen bilden offene Mengen auf offene Mengen ab. Also ist das Bild eines Gebiets wieder ein Gebiet.
 11. Analytische Funktionen mit $f'(z) \neq 0$ sind *lokal injektiv*.
 12. Analytische Funktionen erfüllen ein *Maximumprinzip*: Der Betrag einer analytischen Funktion nimmt in D kein lokales Maximum an, es sei denn, f ist konstant. Ist f sogar stetig in $\overline{D}$, so nimmt $|f|$ sein Maximum auf dem Rand ∂D an.
 13. *Satz von Weierstraß (Grenzfunktionen analytischer Funktionen)*: Konvergiert eine Folge analytischer Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ lokal gleichmäßig gegen f , so ist f analytisch. Hierbei bedeutet *lokal gleichmäßig*, dass die Konvergenz in jeder kompakten Teilmenge von D gleichmäßig ist.
 14. *Satz von Hurwitz*: Sind die Funktionen f_n injektiv, so ist f entweder injektiv oder konstant.

Wir merken an, dass es viele gleichwertige Begriffe für *analytisch* (= darstellbar durch Potenzreihen) gibt, z. B. *holomorph* (= wegunabhängige Integrale), *regulär* (= keine Singularitäten), *konform* (= winkeltreu), die alle verschiedenen Ursprungs sind, aber im Wesentlichen dasselbe bedeuten.

Aufgrund der Eigenschaft 13 können wir die Menge der analytischen Funktionen

$$A := \{f : D \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ analytisch}\}$$

mit der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz ausstatten. A bildet bzgl. dieser Topologie einen *metrisierbaren Vektorraum*. Wir zeigen, wie man eine Metrik erklären kann: Sei (K_n) eine

Ausschöpfung von D durch kompakte Mengen, sei also $K_n \subset K_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = D$, und seien für $g \in A$ die Mengen $B_n(g)$ erklärt durch

$$B_n(g) = \left\{ f \in A \mid |f - g| < \frac{1}{n} \text{ auf } K_n \right\} .$$

Dann bildet $\{B_n(g) \mid g \in A, n \in \mathbb{N}\}$ eine Basis der Topologie von A . Da jedes $B_n(g)$ konvex ist, bildet A einen lokal-konvexen topologischen Vektorraum. Die Topologie ist metrisierbar mit der Metrik

$$d(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sup_{K_n} \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} .$$

Eine Teilmenge von A ist genau dann *kompakt*, wenn sie abgeschlossen und *lokal beschränkt* ist, also beschränkt in jeder kompakten Teilmenge von D .³ Dies ist der Inhalt des *Satzes von Montel*.

2 Integraldarstellungen und Schwarzsches Lemma

In diesem Abschnitt wiederholen wir einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen und kommen dann schließlich zum Schwarzschen Lemma, welches eine einfache, aber wichtige, Folge des Maximumprinzips ist.

Sei in der Folge $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $\bar{z} = x - iy$ die zugehörige konjugiert komplexe Zahl. Real- und Imaginärteile analytischer Funktionen

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2} \left(f(z) + \overline{f(z)} \right) \quad \text{und} \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = \frac{1}{2i} \left(f(z) - \overline{f(z)} \right) \quad (1)$$

heißen *harmonische Funktionen*, denn sie erfüllen die partielle Differentialgleichung

$$\Delta u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 .$$

Dies folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \quad \text{und} \quad v_x(x, y) = -u_y(x, y) \quad (2)$$

und der Tatsache, dass analytische Funktionen unendlich oft differenzierbar sind. Harmonische Funktionen erfüllen ein Maximum- und ein *Minimumprinzip*.

Wegen (1) lässt sich natürlich $u(x, y)$ aus $f(z)$ berechnen. Umgekehrt ist $f(z)$ wegen (2) (bis auf eine imaginäre Konstante) bereits aus $u(x, y)$ bestimmt. Während die Cauchysche Integralformel $f(z)$ durch die Werte von f auf einer z umlaufenden geschlossenen Kurve γ darstellt, gibt die *Schwarzsche Integralformel* $f(z)$ mit Hilfe der Werte von $u(x, y)$ auf γ an. Diese folgt aus der Cauchyschen Integralformel und lautet für die Kreislinie $\zeta = \rho e^{it}$

$$f(z) - i \operatorname{Im} f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(\rho e^{it}) \frac{\rho e^{it} + z}{\rho e^{it} - z} dt . \quad (3)$$

Aus der Cauchyschen Integralformel erhalten wir für $\zeta = z + \rho e^{it}$ ebenfalls die Gleichung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{it}) dt ,$$

³In älterer Literatur werden derartige Familien *normal* genannt.

welche die *Mittelwerteigenschaft* analytischer Funktionen genannt wird. Sie drückt aus, dass der Wert $f(z)$ einer analytischen Funktion an einer Stelle $z \in D$ der Mittelwert der Werte von f auf konzentrischen Kreislinien um z ist. Aus dieser Eigenschaft folgt in einfacher Weise das bereits erwähnte *Maximumprinzip* analytischer Funktionen.

Wir setzen nun unsere Betrachtungen – wie angekündigt – mit dem Schwarzschen Lemma fort.

Satz 1 (Schwarzsches Lemma) Sei f analytisch in $\mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| \leq 1$ in $\mathbb{D}$. Dann ist $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ in $\mathbb{D}$. Gleichheit gilt genau dann, wenn f eine Drehung ist: $f(z) = e^{i\theta} z$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wegen $f(0) = 0$ ist $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$. Also ist die Funktion

$$g(z) := \frac{f(z)}{z} = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots$$

analytisch in $\mathbb{D}$. Wir können o. B. d. A. annehmen, dass f stetig in $\overline{\mathbb{D}}$ ist und wenden auf $g(z)$ das Maximumprinzip an. Auf $\partial\mathbb{D}$ ist $|g(z)| \leq 1$, somit ist $|g(z)| \leq 1$ in $\mathbb{D}$. Den Beweis der Gleichheitsaussage überlassen wir als Übungsaufgabe. $\square$

Man stelle sich vor, eine reelle Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ und $|f(x)| \leq 1$ erfülle automatisch die Bedingung $|f(x)| \leq |x|$, s. Abbildung 1!

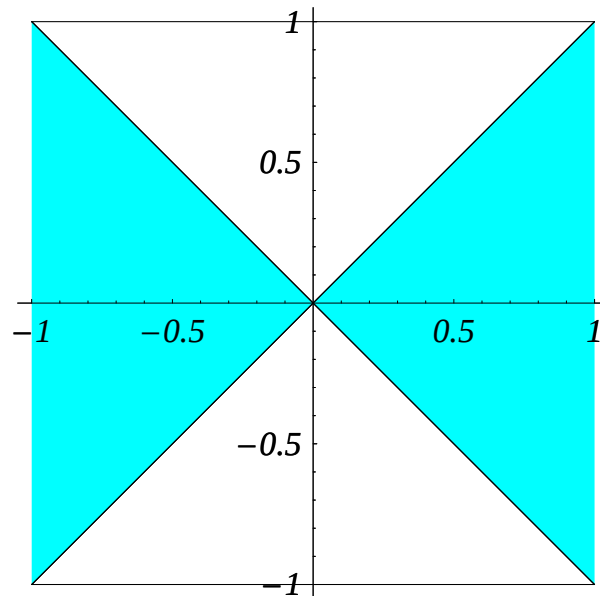


Abbildung 1: Der Graph beschränkter Funktionen liegt immer im markierten Bereich.

Möbiustransformationen⁴

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ mit } ad - bc \neq 0)$$

bilden Kreislinien und Geraden (= Kreislinien auf der Riemannschen Kugel) auf Kreislinien und Geraden ab und daher Kreisscheiben und Halbebenen auf ebensolche.⁵ Automorphismen der Einheitskreisscheibe haben daher die Form

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z + a}{1 + \bar{a}z} \quad (a \in \mathbb{D}),$$

⁴Sie werden auch *lineare Transformationen* genannt.

⁵Eine Polynomdivision zeigt, dass man jede Möbiustransformation zerlegen kann in Verschiebungen $z \mapsto z + a$, Streckungen $z \mapsto az$ und Inversionen $z \mapsto 1/z$.

s. Abbildung 2.

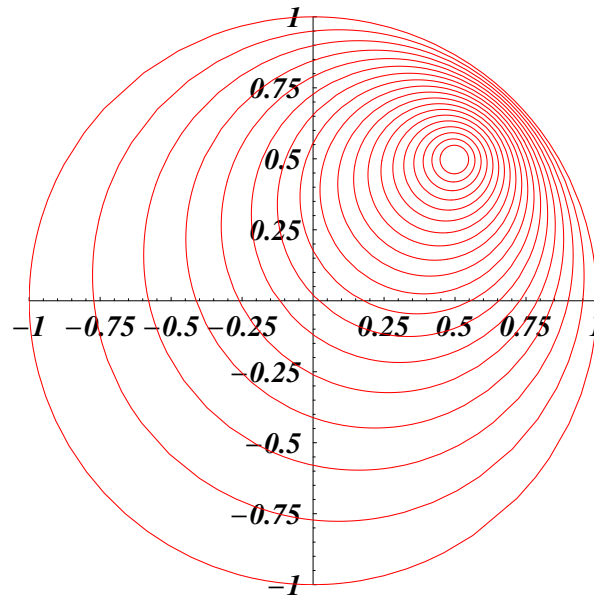


Abbildung 2: Bilder konzentrischer Kreislinien unter $z \mapsto \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ für $a = \frac{1+i}{2}$

Wendet man Automorphismen auf das Schwarzsche Lemma an, so erhält man

Satz 2 (Picksches Lemma) Sei f analytisch in $\mathbb{D}$ mit $|f(z)| \leq 1$ in $\mathbb{D}$. Dann ist

$$\left| \frac{f(z) - f(a)}{1 - \overline{f(a)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a} z} \right|$$

in $\mathbb{D}$. Insbesondere folgt mit $a \rightarrow z$

$$(1 - |z|^2) |f'(z)| \leq 1 - |f(z)|^2$$

Gleichheit gilt in beiden Ungleichungen genau dann, wenn f ein Automorphismus ist.

Beweis: Übungsaufgabe

□

3 Subordination

In diesem Abschnitt führen wir die Betrachtungen zum Schwarzschen und Pickschen Lemma weiter. Dies hat nämlich viel mit Geometrie zu tun! Die meisten Aussagen aus diesem Abschnitt stammen aus [15].⁶

Definition 3 Sei $\omega : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ eine durch 1 beschränkte analytische Funktion mit $\omega(0) = 0$ – also eine Schwarz-Lemma-Funktion! – und seien $f, g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ebenfalls analytisch. Dann sagen wir, f ist subordiniert zu g , falls $f = g \circ \omega$ ist. Wir schreiben hierfür $f \prec g$.

Wir beweisen nun

⁶Aber Achtung: Littlewoods Buch verwendet eine ziemlich altmodische Notation und enthält auch einige Fehler, die durch die ungewohnte Notation besonders schwer zu identifizieren sind!

Satz 4 (Subordinationsprinzip) Seien $f, g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und sei g ferner injektiv.⁷ Dann gilt

(a) $f \prec g$ ist gleichwertig zu $f(0) = g(0)$ und $f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$.

Aus $f \prec g$ folgt die interessante geometrische Eigenschaft

(b) $f(\mathbb{D}_r) \subset g(\mathbb{D}_r)$ für alle $0 < r < 1$.

Ferner impliziert $f \prec g$ Eigenschaften für die Koeffizienten der zugehörigen Potenzreihen $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ und $g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$. Hierzu ist die Injektivität von g nicht erforderlich.

(c) $|a_1| \leq |b_1|$ mit Gleichheit genau dann, wenn $f(z) = g(e^{i\theta} z)$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$.

(d) $|a_2| \leq \max\{|b_1|, |b_2|\}$.

(e) (**Rogosinski**): $\sum_{k=0}^n |a_k|^2 \leq \sum_{k=0}^n |b_k|^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: (a): Offenbar folgt aus $f \prec g$, also $f(z) = g(\omega(z))$, also insbesondere $f(0) = g(\omega(0)) = g(0)$ sowie $f(\mathbb{D}) = g(\omega(\mathbb{D})) \subset g(\mathbb{D})$. Gilt nun aber $f(0) = g(0)$ und $f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$, so erklären wir wegen der Injektivität von g die analytische Funktion $\omega := g^{-1} \circ f$, welche dann die erforderlichen Eigenschaften $\omega(0) := g^{-1} \circ f(0) = g^{-1} \circ g(0) = 0$ sowie $\omega(\mathbb{D}) = g^{-1} \circ f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ hat.

(b): Dies ist offenbar eine direkte Folge des Schwarzschen Lemmas, da aus $|\omega(z)| \leq |z|$ die Beziehung $\omega(\mathbb{D}_r) \subset \mathbb{D}_r$ folgt.

(c): Sei $\omega(z) = \omega_1 z + \omega_2 z^2 + \omega_3 z^3 + \dots$. Dann ist $|a_1| = |b_1 \cdot \omega_1| = |b_1| \cdot |\omega_1| \leq |b_1|$. Die Gleichheitsaussage folgt aus der Gleichheitsaussage des Schwarzschen Lemmas.

(d): Wir wenden Satz 2 auf die ebenfalls durch 1 beschränkte Funktion $\varphi(z) := \frac{\omega(z)}{z} = \omega_1 + \omega_2 z + \omega_3 z^2 + \dots$ an und erhalten

$$(1 - |z|^2) |\varphi'(z)| \leq 1 - |\varphi(z)|^2,$$

insbesondere also für $z = 0$

$$|\varphi'(0)| \leq 1 - |\varphi(0)|^2 \quad \text{bzw.} \quad |\omega_2| \leq 1 - |\omega_1|^2.$$

Für den Koeffizienten a_2 ergibt sich also mit der Dreiecksungleichung

$$|a_2| = |b_2 \omega_1^2 + b_1 \omega_2| \leq |\omega_1|^2 |b_2| + (1 - |\omega_1|^2) |b_1|.$$

Letzteres ist eine Konvexkombination von $|b_1|$ und $|b_2|$. Hieraus folgt die Behauptung.

(e): Um diesen Teil zu beweisen, benötigen wir 2 Hilfssätze.

Hilfssatz 5 (Parsevalsche Gleichung für analytische Funktionen) Für eine analytische Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

für $0 < r < 1$.

⁷Ist g nicht injektiv, so gelten analoge Aussagen auf geeigneten Riemannschen Flächen.

Beweis: Wir schreiben um und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \overline{f(re^{i\theta})} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} r^k e^{-ik\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n \overline{a_k} r^{n+k} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n \overline{a_k} r^{n+k} 2\pi \delta_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n},
\end{aligned}$$

wobei wir das Kroneckersymbol

$$\delta_{n,k} := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = k \\ 0 & \text{falls } n \neq k \end{cases}$$

verwendet haben. Umsortieren sowie Vertauschen von Summation und Integration sind erlaubt, da Potenzreihen in jeder abgeschlossenen Teilmenge ihres Konvergenzbereichs absolut und gleichmäßig konvergieren. Wir bemerken, dass die Parsevalsche Gleichung für analytische Funktionen eine spezielle Form der Parsevalschen Gleichung für orthogonale Systeme ist, angewandt auf das System $(e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$. $\square$

Der zweite Hilfssatz, den wir benötigen, ist

Hilfssatz 6 (Littlewood 1925) Sei $0 < \lambda < \infty$. Ist $f \prec g$, dann gilt für $0 < r < 1$ die Ungleichung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\lambda d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^\lambda d\theta.$$

Beweis: Um diesen Beweis durchzuführen, verwendet man am einfachsten *subharmonische Funktionen*, s. [15], S. 165. Dies führen wir nicht aus. $\square$

Beweis von (e): Sei $s_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k$ und $t_n(z) := \sum_{k=0}^n b_k z^k$. Wegen $f(z) = g(\omega(z))$ können wir schreiben

$$s_n(z) + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \omega(z)^k = t_n(\omega(z)).$$

Es ist nun entscheidend, dass die letzten beiden Summen auf der linken Seite wegen $\omega(0) = 0$ nur Potenzen z^k enthalten mit $k \geq n+1$, also

$$s_n(z) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k z^k = t_n(\omega(z)).$$

Wir wenden nun die Parsevalsche Gleichung an und erhalten unter Benutzung von Hilfssatz 6 mit $\lambda = 2$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n |a_k|^2 r^{2k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2 r^{2k} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |t_n(\omega(re^{i\theta}))|^2 d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |t_n(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{k=0}^n |b_k|^2 r^{2k}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\sum_{k=0}^n |a_k|^2 r^{2k} \leq \sum_{k=0}^n |b_k|^2 r^{2k},$$

und das Resultat folgt dann mit $r \rightarrow 1$. $\square$

Falls die Koeffizientenfolge der superordinierenden Funktion, welche das maximale Bildgebiet vorgibt, besonders regelmäßig ist, gelten tiefere Resultate.

Bevor wir uns diesen widmen, möchte ich eine spezielle Funktion genauer betrachten, welche bereits bei der Schwarzschen Integraldarstellung vorkam, in den folgenden Beweisen eine wichtige Rolle spielen wird und uns im nächsten Abschnitt wieder begegnet.

Beispiel 7 *Wir betrachten die Funktion*

$$H(z) := \frac{1+z}{1-z} = \frac{2}{1-z} - 1 = 1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + \dots \quad (4)$$

Diese bildet als Möbiustransformation die Einheitskreisscheibe auf die rechte Halbebene

$$\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w > 0\}$$

ab. Dies folgt sowohl aus der Rechnung

$$H(e^{i\theta}) = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} = i \cot \frac{\theta}{2}$$

als auch aus der Rechnung

$$\operatorname{Re} \frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} = \operatorname{Re} \frac{(1+re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})} = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2} = P(r, \theta),$$

aus welcher die Beziehung $\operatorname{Re} H(re^{i\theta}) > 0$ direkt abgelesen werden kann. Diese wichtige Funktion $P(r, \theta)$ wird als Poissonkern bezeichnet, da man – als Folge der Schwarzschen Integralformel (3) – für harmonische Funktionen $u(z)$ die Poissonsche Integralformel zeigen kann:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(t-\theta) + r^2} dt,$$

welche gilt, falls u harmonisch in $D \supset \overline{\mathbb{D}}$ ist.

Eine weitere Folge der Schwarzschen Integralformel und der Potenzreihenentwicklung (4) von $H(z)$ folgt für die Koeffizienten einer analytischen Funktion $f(z)$ daher die Formeln

$$\begin{aligned} a_n(f) \rho^n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(\rho e^{it}) e^{-int} dt \quad (n \in \mathbb{N}) \\ a_0(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(\rho e^{it}) dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Der Poissonkern hat auch eine sehr einfache Fourierentwicklung

$$P(r, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta}.$$

Weitere Eigenschaften der Funktion H werden in Satz 11 betrachtet werden.

Nun kommen wir zurück zu Ergebnissen über die Koeffizienten subordinierter Funktionen. Mit Δ_n bezeichnen wir den Vorwärtsdifferenzenoperator bzgl. der Variablen n :

$$\Delta_n a_n := a_{n+1} - a_n.$$

Satz 8 (Littlewood) Seien $f, g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, sei $f \prec g$ und sei $n \in \mathbb{N}_{>2}$. Dann gilt für den n -ten Potenzreihenkoeffizienten von $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ und $g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$:

- (a) Sind die Koeffizienten $b_1, b_2, \dots, b_n$ nichtnegativ, monoton fallend und konvex, d. h., $b_n \geq 0$, $b_n - b_{n-1} \leq 0$ und $\Delta_k^2 b_k \geq 0$ für $k = 1, \dots, n-2$, dann gilt $|a_n| \leq b_1$.
- (b) Sind die Koeffizienten $b_1, b_2, \dots, b_n$ nichtnegativ, monoton steigend und konvex, d. h., $b_1 \geq 0$, $b_2 - b_1 \geq 0$ und $\Delta_k^2 b_k \geq 0$ für $k = 3, \dots, n$, dann gilt $|a_n| \leq b_n$.

Beweis: Zum Beweis verwenden wir zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 9 Sei $g(z) = \frac{1}{2}b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$ in $\mathbb{D}$ erklärt mit

$$b_k \geq 0, \quad \Delta_k b_k = b_{k+1} - b_k \leq 0 \quad \text{und} \quad \Delta_k^2 b_k = b_{k+2} - 2b_{k+1} + b_k \geq 0$$

für $k \geq 0$. Dann ist $\operatorname{Re} g(z) > 0$ für $z \in \mathbb{D}$.

Beweis: Wir setzen

$$t_n(z) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n z^k \quad \text{und} \quad \tau_n(z) := \sum_{k=0}^n t_k(z) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Wir erhalten zunächst durch Summation

$$\begin{aligned} \tau_n(z) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^k z^j \right) = \frac{n+1}{2} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k z^j \\ &= \frac{n+1}{2} + \sum_{k=1}^n (n+1-k) z^k \\ &= \frac{2z^{n+2} - (n+1)z^2 - 2z + n+1}{2(1-z)^2} \end{aligned}$$

und schließlich für $z = e^{i\theta}$ nach einiger Rechnung

$$\operatorname{Re} \tau_n(e^{i\theta}) = \frac{\sin^2 \left(\frac{(n+1)\theta}{2} \right)}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \geq 0.$$

Aus dem Minimumprinzip folgt dann, dass $\operatorname{Re} \tau_n(z) \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{D}$ ist. Ferner gilt für $z \in \mathbb{D}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} t_n(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{1+z}{1-z} > 0.$$

In der Folge benötigen wir die Technik der *partiellen Summation*, welche auf der Formel

$$\sum_{k=m}^n u_k \cdot \Delta_k v_k = u_{n+1} \cdot v_{n+1} - u_m \cdot v_m - \sum_{k=m}^n v_{k+1} \cdot \Delta_k u_k$$

beruht. Diese wenden wir nun zweimal an und erhalten wegen $\Delta_k t_k(z) = z^{k+1}$ und $\Delta_k \tau_k(z) = t_{k+1}(z)$ die Umformung

$$\frac{1}{2}b_0 + \sum_{k=1}^n b_k z^k = b_{n+1} t_n(z) - \sum_{k=0}^n t_k(z) \Delta_k b_k = b_{n+1} t_n(z) + (b_{n+1} - b_{n+2}) \tau_n(z) + \sum_{k=0}^n \tau_k(z) \Delta_k^2 b_k, \quad (6)$$

wobei wir bei der ersten Umformung $u_k = b_k, v_k = t_{k-1}(z)$ und daher $\Delta_k v_k = z^k$ sowie im zweiten Fall $u_k = \Delta_k b_k, v_k = \tau_{k-1}(z)$, d. h. $\Delta_k v_k = \tau_k(z)$, setzen. Also ist gemäß (6)

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{2}b_0 + \sum_{k=1}^n b_k z^k \right) \geq b_{n+1} \operatorname{Re} t_n(z)$$

in $\mathbb{D}$. Hieraus folgt das Resultat für $n \rightarrow \infty$. □

Hilfssatz 10 Sei $k \geq 1$, $\omega : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ mit $\omega(0) = 0$ und $\omega(z)^k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n^{(k)} z^n$ und sei $P_n(z) = \sum_{k=1}^n a_n^{(k)} z^k$. Dann gilt für $z \in \mathbb{D}$

$$|P_n(z)| = \left| \sum_{k=1}^n a_n^{(k)} z^k \right| \leq 1.$$

Beweis: Sei $|\zeta| \leq 1$. Dann hat die Funktion

$$h(z) = \frac{1}{2} \frac{1 + \zeta \omega(z)}{1 - \zeta \omega(z)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \omega(z)^k \zeta^k = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n a_n^{(k)} \zeta^k \right) z^n$$

positiven Realteil für $z \in \mathbb{D}$. Da $P_n(\zeta)$ der n -te Koeffizient von $h(z)$ ist, folgt die zu beweisende Abschätzung aus Satz 12 des nächsten Abschnitts. $\square$

Beweis von Satz 8 (a): Sei $f = g \circ \omega$ mit $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ und $g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$. Dann gilt

$$a_n = \sum_{k=1}^n a_n^{(k)} b_k \quad (7)$$

mit den Koeffizienten aus Hilfssatz 10, denn dann ist $f = g \circ \omega$ gleichwertig zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_n^{(k)} b_k z^n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n^{(k)} z^n \right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \omega(z)^k.$$

Aus Hilfssatz 9 folgt, dass

$$h(z) = \frac{1}{2} b_1 + b_2 z + \dots + b_{n-1} z^{n-2} + b_n \sum_{k=n-1}^{\infty} z^k$$

für $z \in \mathbb{D}$ positiven Realteil hat. Daher folgt aus der Koeffizientendarstellung (5) von Schwarz

$$b_k \rho^{k-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} h(\rho e^{i\theta}) e^{-i(k-1)\theta} d\theta$$

für $k = 1, \dots, n$ wegen Hilfssatz 10, dass

$$\left| \sum_{k=1}^n a_n^{(k)} b_k \rho^k \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} h(\rho e^{i\theta}) |e^{i\theta} P_n(e^{-i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} h(\rho e^{i\theta}) d\theta = b_1.$$

Das Resultat folgt mit (7) und $\rho \rightarrow 1$.

(b): Aus Hilfssatz 9 folgt diesmal, dass die Funktion

$$h(z) = \frac{1}{2} b_n + b_{n-1} z + \dots + b_2 z^{n-2} + b_1 \sum_{k=n-1}^{\infty} z^k$$

für $z \in \mathbb{D}$ positiven Realteil hat. Daher folgt aus der Koeffizientendarstellung (5) von Schwarz

$$b_k \rho^{n-k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} h(\rho e^{i\theta}) e^{-i(n-k)\theta} d\theta$$

für $k = 1, \dots, n$ wegen Hilfssatz 10, dass

$$\left| \sum_{k=1}^n a_n^{(k)} b_k \rho^{n-k} \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} h(\rho e^{i\theta}) |e^{i\theta} P_n(e^{-i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} h(\rho e^{i\theta}) d\theta = b_n.$$

Das Resultat folgt schließlich wieder mit $\rho \rightarrow 1$. $\square$

4 Funktionen mit positivem Realteil

Die folgende Menge analytischer Funktionen spielt – wie bereits im letzten Abschnitt gesehen – eine enorm wichtige Rolle:

$$P := \{p \in A \mid p(0) = 1 \text{ und } \operatorname{Re} p(z) > 0\} .$$

Offenbar handelt es sich bei P um diejenigen analytischen Funktionen, deren Bildgebiet in der rechten Halbebene $\mathbb{H}$ liegt. Dies können wir aber wegen des Subordinationsprinzips mit Hilfe der Subordination ausdrücken. Da die Funktion $H(z) := \frac{1+z}{1-z}$ die Einheitskreisscheibe bijektiv auf die rechte Halbebene abbildet, gilt somit

$$P = \{p \in A \mid p(0) = 1 \text{ und } p(\mathbb{D}) \subset \mathbb{H}\} = \left\{ p \in A \mid p \prec \frac{1+z}{1-z} \right\} .$$

Als Folge dieser Erkenntnis erhalten wir

Satz 11 *Die Menge P ist eine kompakte, konvexe Teilmenge von A . Hierbei heißt eine Teilmenge $M \subset A$ konvex, wenn für $f, g \in M$ und $t \in [0, 1]$ auch die Verbindungsstrecke $tf + (1-t)g \in M$ liegt. Die lokale Beschränktheit von P folgt aus der Abschätzung*

$$\frac{1-r}{1+r} \leq |p(re^{i\theta})| \leq \frac{1+r}{1-r} , \quad (8)$$

welche für alle $0 < r < 1$ gültig ist.

Beweis: Abgeschlossenheit und Konvexität von P sind klar. Die Abschätzung (8) ist eine direkte Folge aus dem Subordinationsprinzip

$$p(\mathbb{D}_r) \subset g(\mathbb{D}_r) . \quad (9)$$

Die Funktion H bildet nämlich als Möbiustransformation Kreisscheiben auf Kreisscheiben ab. Somit ergeben sich aus $H(r) = \frac{1+r}{1-r}$ und $H(-r) = \frac{1-r}{1+r}$ die Bildgebiete

$$H(\mathbb{D}_r) = \left\{ z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid \left| z - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right| < \frac{2r}{1-r^2} \right\} . \quad (10)$$

Die Beziehungen (9)–(10) sind weit genauer als (8). Die rechte Abschätzung in (8) drückt die lokale Beschränktheit aus. $\square$

Abbildung 3 zeigt die Gebiete $H(\mathbb{D}_r)$.

Zum ersten Mal haben wir mit P nun eine kompakte Teilmenge von A kennengelernt. Da stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihre Maxima und Minima annehmen, und da das Koeffizientenfunktional

$$|a_n(f)| := \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|$$

eine derartige stetige Funktion von A nach $\mathbb{R}$ darstellt, existiert also für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Maximum $\max_{p \in P} |a_n(p)|$.

Aus der Potenzreihenentwicklung von $H(z)$ können wir die betreffenden Maxima nun auf elementare Weise bestimmen.

Satz 12 *Sei $p(z) = 1 + p_1z + p_2z^2 + \dots \in P$. Dann gilt $|p_n| \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also*

$$\max_{p \in P} |a_n(p)| = 2 .$$

Für $n = 1$ gilt Gleichheit genau dann, falls $p(z) = \frac{1+e^{i\theta}z}{1-e^{i\theta}z} = H(e^{i\theta}z)$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$.

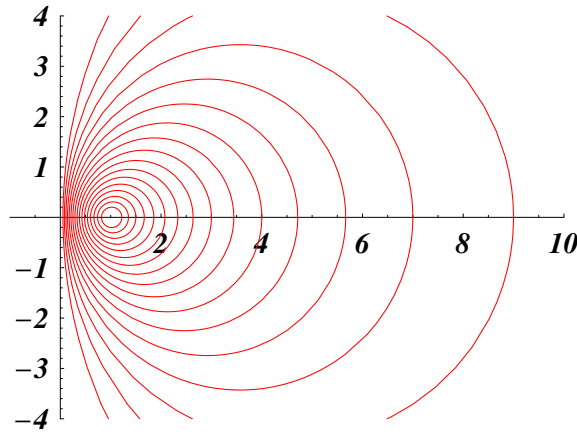


Abbildung 3: Bilder konzentrischer Kreislinien unter $H(z) = \frac{1+z}{1-z}$

Beweis: Für $n = 1$ folgt die Behauptung samt Gleichheitsaussage direkt aus dem Subordinationsprinzip mittels Satz 4 (c). Der Rest folgt natürlich aus Satz 8 (b). Wesentlich elementarer erhält man dieses Resultat aber mit folgendem Argument. Wir betrachten zunächst $n = 2$. Mit $p \in P$ ist auch die gerade Funktion

$$q(z) := \frac{1}{2} \left(p(z) + p(-z) \right) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{2m} z^{2m} \in P ,$$

da sie eine Konvexkombination von Funktionen aus P darstellt. Schließlich ist auch

$$r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k z^k := q(\sqrt{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{2m} z^m \in P ,$$

da r analytisch und offenbar $\operatorname{Re} r(z) > 0$ ist. Nun ist aber $r_1 = p_2$, woraus $|p_2| = |r_1| \leq 2$ folgt.

Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ benutzen wir die *Einheitswurzel* $\omega_n := e^{2\pi i/n}$. Mit $p \in P$ ist auch die Konvexkombination

$$q(z) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p(\omega_n^j z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \omega_n^{jk} p_k z^k = \sum_{m=0}^{\infty} p_{nm} z^{nm} \in P ,$$

und damit auch $r(z) := q(z^{1/n}) \in P$. Aus $r_1 = p_n$ folgt dann die Behauptung. $\square$

Ich möchte anmerken, dass die Gleichheitsaussage für $n > 1$ wesentlich komplizierter aussieht.

Wesentlich tiefer liegt der folgende Satz, der auf Riesz und Herglotz (1914) zurückgeht. Um ihn zu formulieren, benötigt man das Konzept des Riemann-Stieltjes-Integrals (oder des Maßintegrals aus der Maßtheorie). Sei $\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine im Intervall $[a, b]$ (nicht notwendig streng) wachsende Funktion. Dann wird das *Riemann-Stieltjes-Integral* einer stetigen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt erklärt. Sei $\mathcal{Z} := (a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b)$ eine *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$, dann erklären wir

$$\int_a^b f(t) d\mu(t) := \lim_{|\mathcal{Z}| \rightarrow 0} \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n f(\tau_k) (\mu(t_k) - \mu(t_{k-1})) ,$$

wobei die Punkte $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ liegen und die *Feinheit der Zerlegung*

$$|\mathcal{Z}| := \max_{k=1, \dots, n} (t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0$$

gegen 0 strebt. Das Riemann-Stieltjes-Integral ist somit ein gewichtetes Integral und verallgemeinert in offensichtlicher Weise den Riemannschen Integralbegriff, bei welchem $\mu(t) = t$ ist.

Wir betrachten zwei Sonderfälle: Ist insbesondere $\mu(t)$ streng monoton wachsend und stetig differenzierbar, so lässt sich das Riemann-Stieltjes-Integral durch ein gewöhnliches Riemann-Integral ausdrücken

$$\int_a^b f(t) d\mu(t) = \int_a^b f(t) \mu'(t) dt, \quad (11)$$

wobei $\mu'(t) \geq 0$ eine nichtnegative Gewichtsfunktion darstellt. Ist andererseits $\mu(t)$ stückweise konstant und seien die positiven Sprünge μ_k von $\mu(t)$ an den Stellen $t_k \in [a, b]$ ($k \in \mathbb{N}$) mit $t_1 < t_2 < \dots$, dann ergibt sich für das Riemann-Stieltjes-Integral die Summe

$$\int_a^b f(t) d\mu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f(t_k) \mu_k. \quad (12)$$

Wir überlegen uns nun Folgendes: Für alle $t \in [0, 2\pi]$ liegt die Funktion $\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}$ in P , und all diese Funktionen haben dasselbe Bildgebiet, nämlich $\mathbb{H}$. Bilden wir nun die Konvexkombination

$$\sum_{k=1}^n \mu_k \frac{1+e^{-it_k}z}{1-e^{-it_k}z}$$

mit $\mu_k > 0$ und $\sum_{k=1}^n \mu_k = 1$, so liegt diese ebenfalls in P . Führt man schließlich einen Grenzübergang in A durch, so folgt, dass auch Funktionen mit einer Darstellung

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\mu(t),$$

bei welcher $\mu(t)$ in $[0, 2\pi]$ wächst mit $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$, ebenfalls in P liegen.

Folgendes tiefe Resultat besagt nun, dass hiervon auch die Umkehrung gilt.

Satz 13 (Riesz-Herglotz-Darstellung) *Eine analytische Funktion $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots$ der Einheitskreisscheibe liegt genau dann in P , wenn es eine wachsende Funktion $\mu(t)$ in $[0, 2\pi]$ mit $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$ gibt, so dass*

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\mu(t) \quad (13)$$

gilt.

Beweis: (Details s. z. B. [17], Theorem 2.4). Wir müssen nur noch zeigen, dass aus $p \in P$ die Riesz-Herglotz-Darstellung (13) folgt. Sei also $p \in P$. Als Folge der Cauchyschen Integralformel lassen sich analytische Funktionen aus ihren Realteilen rekonstruieren. Die resultierende Formel wird die *Schwarzsche Formel* genannt und liefert in unserem Fall

$$p(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} \operatorname{Re} p(re^{it}) dt = \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} d\mu(t, r),$$

wobei

$$\mu(t, r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^t \operatorname{Re} p(re^{i\tau}) d\tau$$

eine in $[0, 2\pi]$ wachsende Funktion mit $\mu(0, r) = 0$ und $\mu(2\pi, r) = 1$ darstellt. Letzteres folgt aus der Eigenschaft $p(0) = 1$. Der Rest des Beweises besteht darin, den Grenzübergang für $r \rightarrow 1$ durchzuführen. Was dann zu zeigen bleibt, ist, dass daraus wieder eine wachsende Funktion $\mu(t)$ resultiert. Hierzu benötigt man tiefe Sätze aus der Maßtheorie (Auswahlsatz von Helly o.ä.). Dies wollen wir nicht vertiefen. $\square$

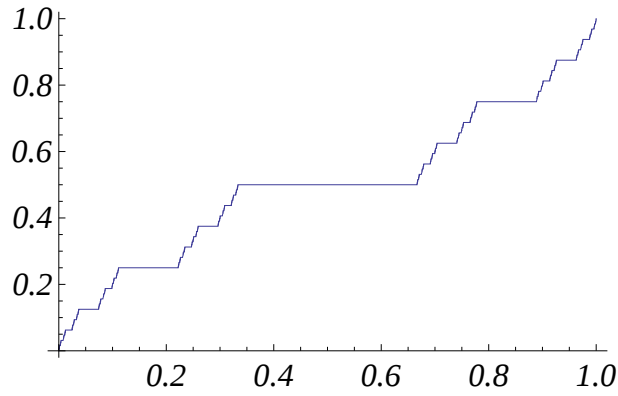


Abbildung 4: Die Cantorfunktion wächst auf einer Lebesgue-Nullmenge.

Wer Maßintegrale kennt, sollte sich die Riesz-Herglotz-Darstellung mit einem *Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mu(t)$ vorstellen. Man kann Wahrscheinlichkeitsmaße klassifizieren, und es stellt sich heraus, dass es drei Typen von Wahrscheinlichkeitsmaßen gibt: absolut stetige (mit einer Darstellung gemäß (11)), diskrete (mit einer Darstellung gemäß (12)) und singuläre (welche nicht absolut stetig sind, die aber – als wachsende Funktionen – auf einer *Menge vom Lebesguemaß Null* wachsen) sowie Konvexkombinationen hiervon. Ein berühmtes Beispiel einer singulären Funktion ist die *Cantorfunktion*, s. Abbildung 4, welche auf der Menge derjenigen Zahlen des Intervalls $[0, 1]$ wächst, deren Ternärdarstellung die Ziffer 1 nicht enthält. Diese Menge hat Maß Null.

Als Folge des Riesz-Herglotzschen Darstellungssatzes besitzen die Koeffizienten von Funktionen mit positivem Realteil ebenfalls einfache Integraldarstellungen.

Satz 14 Sei $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots \in P$ und sei $\mu(t)$ wie in Satz 13. Dann haben die Koeffizienten eine Darstellung der Form

$$p_n = 2 \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t) .$$

Beweis: Ableiten unter dem Integralzeichen ist wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz erlaubt. Daher folgt der Satz aus der Entwicklung des Integranden (4). $\square$

Natürlich folgt Satz 12 in ganz trivialer Weise aus Satz 14. Nun kann allerdings auch die Gleichheitsaussage vollständig geklärt werden.

Satz 15 Sei $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots \in P$. Dann gilt $|p_n| \leq 2$ mit Gleichheit genau dann, wenn

$$p(z) = \sum_{k=1}^n \mu_k \frac{e^{i\alpha+2\pi ik/n} + z}{e^{i\alpha+2\pi ik/n} - z}$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ sowie $\mu_k > 0$ und $\sum_{k=1}^n \mu_k = 1$.

Beweis: Aus Satz 14 folgt

$$|p_n| = \left| 2 \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t) \right| \leq 2 \int_0^{2\pi} d\mu(t) = 2 ,$$

und Gleichheit gilt offenbar genau dann, wenn $\mu(t)$ konstant ist bis auf Sprünge $\mu_k > 0$ an den Stellen $t_k = \alpha + 2\pi k/n$, so dass der Integrand bis auf die Sprünge konstantes Argument hat. $\square$

Wir wollen den Satz von Riesz-Herglotz nun noch in ein anderes Licht rücken. Hierzu benötigen wir folgende Definition.

Definition 16 Sei $M \subset V$ eine Teilmenge eines topologischen Vektorraums V . Dann wird $x \in V$ ein Extrempunkt von M genannt, falls sich x nicht darstellen lässt als Konvexkombination $x = tx_1 + (1-t)x_2$ mit $t \in (0, 1)$, $x_1 \neq x_2 \in M$. Die Menge der Extrempunkte von M bezeichnen wir mit $E(M)$.

Besonders interessant sind die Extrempunkte abgeschlossener und konvexer Mengen. Die abgeschlossene konvexe Hülle $\overline{\text{co}} M$ einer Menge M ist der topologische Abschluss der konvexen Hülle von M . Hierbei besteht die konvexe Hülle von M aus denjenigen Funktionen, die durch endliche konvexe Darstellungen

$$\sum_{k=1}^n \mu_k x_k \quad \left(n \in \mathbb{N}, x_k \in M, \mu_k > 0, \sum_{k=1}^n \mu_k = 1 \right)$$

erzeugt werden.

Beispiel 17 (a): Sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein Quadrat (samt Rand). Q ist offenbar abgeschlossen und konvex, daher $Q = \overline{\text{co}} Q$. Die Extrempunkte von Q sind genau die 4 Ecken. Ähnliches gilt für jedes konvexe Polyeder in $\mathbb{R}^n$.

(b): Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ eine endliche Menge. Dann ist die abgeschlossene konvexe Hülle $\overline{\text{co}} M$ ein Vieleck.

(c): Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ eine Kreisscheibe (samt Rand). D ist offenbar abgeschlossen und konvex, die Extrempunkte von D sind alle Randpunkte, also die gesamte Kreislinie.

Es gilt ganz allgemein in lokal-konvexen topologischen Vektorräumen der

Satz 18 (Krein-Milman) Sei $M \subset V$ eine kompakte Teilmenge eines lokal-konvexen topologischen Vektorraums V . Dann gilt

(a) $\overline{\text{co}} M = \overline{\text{co}} E(M)$, m. a. W.: Die Extrempunkte von M spannen die abgeschlossene konvexe Hülle von M konvex auf. Insbesondere ist also $E(M) \neq \emptyset$ für kompaktes $M \neq \emptyset$.

(b) Ist zusätzlich $\overline{\text{co}} M$ kompakt, dann gilt ferner $E \overline{\text{co}} M \subset M$.

Beweis: s. z. B. [4]. □

Wir weisen darauf hin, dass für $V = A$ die Voraussetzung für (b) immer erfüllt ist: Ist M kompakt, so ist auch $\overline{\text{co}} M$ kompakt, denn diese Menge ist abgeschlossen und mit M lokal beschränkt.

Beispiel 19 (a): Sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein Quadrat (samt Rand). Natürlich wird Q konvex aufgepannt von den 4 Ecken. Ähnliches gilt für jedes konvexe Polyeder in $\mathbb{R}^n$.

(b): Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ eine endliche Menge. Dann ist die abgeschlossene konvexe Hülle $\overline{\text{co}} M$ ein Vieleck, dessen Extrempunkte in M liegen.

(c): Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ eine Kreisscheibe (samt Rand). D wird konvex aufgespannt von seinen Randpunkten.

Man beachte, dass die Vorstellung des $\mathbb{R}^n$ noch nicht alle topologischen Aspekte liefert, denn im Endlich-Dimensionalen muss man für die Rekonstruktion einer konvexen Menge aus ihren Extrempunkten keinen Abschluss bilden. Allerdings ist A natürlich ein unendlich-dimensionaler Vektorraum. In diesem Setting kann der Satz von Riesz-Herglotz nun auch folgendermaßen ausgedrückt werden:

Satz 20 (Extrempunkte von P) Die Extrempunkte von P sind gegeben durch

$$E(P) = \left\{ \frac{1 + e^{-it}z}{1 - e^{-it}z} \mid t \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Beweis: „ $\subset$ “: Wir zeigen zunächst, dass jeder Extrempunkt von P die angegebene Form hat. Die Riesz-Herglotzsche Darstellung einer Funktion $p \in P$ zeigt, dass diese im topologischen Abschluss der konvexen Hülle der Kernfunktionen

$$\frac{1 + e^{-it}z}{1 - e^{-it}z}, \quad (t \in [0, 2\pi]) \quad (14)$$

liegt. Da der Satz von Krein-Milman besagt, dass P (als kompakte konvexe Menge) von ihren Extrempunkten aufgespannt wird, kommen als Extrempunkte von P nur die Funktionen (14) in Frage.

„ $\supset$ “: Umgekehrt: Wäre auch nur eine der Funktionen $\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}$ kein Extrempunkt, so hätte diese eine konvexe Darstellung

$$\frac{1 + e^{-it}z}{1 - e^{-it}z} = t f_1(z) + (1 - t) f_2(z), \quad (t \in (0, 1), f_1 \neq f_2 \in P)$$

und wir erhielten für die gedrehte Version ebenfalls eine konvexe Darstellung

$$\frac{1 + e^{-iu}z}{1 - e^{-iu}z} = t f_1(e^{-i(u-t)}z) + (1 - t) f_2(e^{-i(u-t)}z).$$

Damit hätte P gar keinen Extrempunkt. Dies widerspricht aber dem Satz von Krein-Milman. $\square$

Für Funktionalanalytiker möchte ich erwähnen, dass auch die folgende Umkehrung gilt. Kennt man wie in Satz 20 die Extrempunkte E einer kompakten, konvexen Menge $M \subset V$, so gilt für $f \in M$ eine Integraldarstellung $f = \int_E x d\mu(x)$ mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf E . Dies ist der Inhalt des Satzes von Choquet, s. z. B. [18], Anhang A, bzw. [16].

Wir beenden diesen Abschnitt mit einer weiteren Deutung des Satzes von Riesz-Herglotz.

Satz 21 Die Menge der endlichen Konvexkombinationen

$$p(z) = \sum_{k=1}^n \mu_k \frac{1 + e^{-it_k}z}{1 - e^{-it_k}z} \quad (n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in [0, 2\pi], \mu_1, \dots, \mu_n > 0, \sum_{k=1}^n \mu_k = 1)$$

liegt dicht in P .

Beweis: Riesz-Herglotz-Darstellung. $\square$

5 Der Riemannsche Abbildungssatz und die Bieberbachsche Vermutung

Wir haben bereits eine analytische Funktion kennengelernt, welche die Einheitskreisscheibe analytisch und bijektiv auf ein anderes Gebiet der Ebene abbildet. Wir nennen derartige Funktionen *schlicht*. Die Funktion $H(z) = \frac{1+z}{1-z}$ ist ein solches Beispiel, ihr Bildgebiet ist die rechte Halbebene. Ausgehend von $h(z)$ kann man sich weitere Bildgebiete und damit weitere schlichte Funktionen konstruieren. Die Funktion $H(z)^\alpha$ bildet $\mathbb{D}$ auf einen Sektor des Winkels $\alpha\pi$ ab, da durch die Abbildung $w \mapsto w^\alpha$ das Argument jedes Punkts der rechten Halbebene mit dem Faktor α multipliziert wird. Für $\alpha \in (0, 2]$ liefert dies ein Gebiet ohne Überlappung und damit eine bijektive Abbildung. Für $\alpha > 2$ ist diese Funktion allerdings nicht mehr schlicht. Speziell für $\alpha = 2$ bildet die Funktion $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ die Einheitskreisscheibe auf die ganze Ebene ab, die auf der negativen reellen Achse aufgeschlitzt ist.

In der Mitte des 19. Jahrhunderts hat sich Riemann mit der Frage beschäftigt, ob jedes Bildgebiet G in Frage kommt. Zunächst einmal macht man sich klar, dass eine topologische Eigenschaft notwendig ist: das Bildgebiet G muss einfach zusammenhängend sein. Dies bedeutet, grob gesprochen, dass G keine Löcher hat, und ist wie folgt definiert.

Definition 22 (Einfacher Zusammenhang) Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ der komplexen Ebene heißt einfach zusammenhängend, falls das Komplement $\mathbb{C} \setminus G$ nur eine Zusammenhangskomponente hat.

Riemann hat im Jahre 1851 seinen berühmten Abbildungssatz formuliert, der besagt, dass es eine derartige schlichte Funktion für jedes einfach zusammenhängende Bildgebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit $G \neq \mathbb{C}$ wirklich immer gibt. Für $G = \mathbb{C}$ kann es jedoch eine schlichte Abbildung nicht geben. Dies widerspricht dem Satz von Liouville.

Satz 23 (Riemannscher Abbildungssatz) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges einfach zusammenhängendes Gebiet $G \neq \mathbb{C}$ und sei $w \in G$ ein beliebiger Punkt des Bildgebiets. Dann gibt es eine schlichte Abbildung $f : \mathbb{D} \rightarrow G$ mit $f(z) = w + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, wobei das Argument von a_1 beliebig gewählt werden kann, während $|a_1|$ durch das Gebiet G bereits eindeutig festgelegt ist.

Beweis: Wir führen diesen Beweis hier nicht vollständig durch, denn er ist relativ umfangreich, wir skizzieren ihn nur kurz. Die Idee ist, ein Extremalproblem zu lösen. Man sucht diejenige analytische und injektive Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow G$ mit $f(0) = w$, welche betragsmäßig den größten ersten Koeffizienten hat

$$|a_1(f)| = \max\{|a_1(g)| \mid g : \mathbb{D} \rightarrow G \text{ mit } g(0) = w\}.$$

Dass dieses Extremalproblem eine Lösung hat, folgt mit Kompaktheitsargumenten. Es stellt sich heraus, dass die Lösungsfunktion $f(z)$ die gesuchte schlichte Abbildung ist, d. h., dass sie auch surjektiv ist. Details s. [2], Kapitel 4.7. $\square$

Während Riemanns Originalbeweis Lücken enthielt, konnten zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts die Beweislücken geschlossen werden (Carathéodory, Koebe).

Da jedes Gebiet durch eine Ähnlichkeitstransformation $w \mapsto Aw + B$ in ein ähnliches Gebiet mit $0 \in G$ abgebildet werden kann, ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit, sich mit Funktionen aus der Familie

$$S := \left\{ f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \text{ analytisch und injektiv} \right\}$$

zu beschäftigen. Die derart normierten analytischen Funktionen bezeichnen wir mit $N := \{f \in A \mid f(0) = 0 \text{ und } f'(0) = 1\}$. In analoger Weise betrachtet man schlichte (meromorphe) Abbildungen von $\Delta := \left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} \mid |z| > 1 \right\}$ nach $\hat{\mathbb{C}}$ mit $\infty \mapsto \infty$ und damit die Familie

$$\Sigma := \left\{ g : \Delta \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \mid g(z) = z + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots \text{ meromorph und injektiv} \right\}.$$

Die Funktionen aus Σ haben aufgrund ihrer Normierung also *Laurententwicklungen*.

Beispiel 24 Wir sehen uns an, wie die Normierung bei unseren bereits betrachteten Sektorenabbildungen ausfällt. Für die Funktion $h(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha$ ist $h'(0) = 2\alpha$, also ist die Funktion

$$h_\alpha(z) := \frac{1}{2\alpha} \left(\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\alpha - 1 \right) = z + \alpha z^2 + \frac{2\alpha^2 + 1}{3} z^3 + \dots \in S.$$

Diese Normierungen machen die Menge S (als auch die Menge Σ) kompakt.

Satz 25 (Kompaktheit von S und Σ) Die Menge $S \subset A$ ist kompakt. Ebenso ist Σ eine kompakte Teilmenge der meromorphen Funktionen der Einheitskreisscheibe.

Beweis: Wir werden in der Folge den Koebeschen Verzerrungssatz

$$|f(re^{i\theta})| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \quad (15)$$

für Funktionen $f \in S$ beweisen. Dieser zeigt die lokale Beschränktheit von S , und wegen der Abgeschlossenheit von S (Satz von Hurwitz) ist S kompakt. Die Kompaktheit von Σ wird analog bewiesen. $\square$

Also stellt sich wieder die Frage, die maximalen n -ten Taylorkoeffizienten zu finden.

Beispiel 26 (Die Koebefunktion) Wir betrachten nun die normierte Funktion $K(z) := h_2(z)$, welche Koebefunktion genannt wird und eine der wichtigsten Funktionen der geometrischen Funktionentheorie ist. Die Koebefunktion hat die Darstellungen

$$K(z) = \frac{1}{4} \left(\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n. \quad (16)$$

Abbildung 5 zeigt das Abbildungsverhalten der Koebefunktion. Ihr Bildgebiet ist wegen (16) die ganze komplexe Ebene mit einem radialen Schlitz auf der negativen reellen Achse, welcher bei $-1/4$ beginnt.

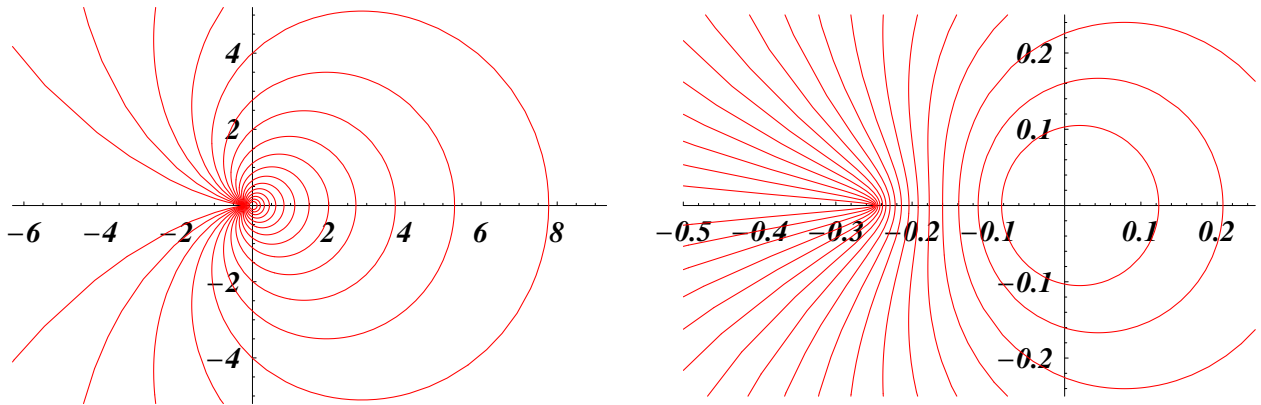


Abbildung 5: Bilder konzentrischer Kreislinien unter der Koebefunktion $K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$

Die Koebefunktion zeigt, dass der Koebesche Verzerrungssatz (15) scharf ist und Gleichheit bei dieser Ungleichung möglich ist. Gleichheit tritt für $f \in S$ nur ein, falls f eine Drehung der Koebefunktion ist: $f(z) = e^{-i\theta} K(e^{i\theta} z)$.

Die Bieberbachsche Vermutung über die Koeffizienten schlichter Funktionen $f \in S$ ist die Vermutung, dass die Koebefunktion das Koeffizientenproblem $k_n = \max_{f \in S} |a_n(f)|$ löst, und lässt sich somit auf die Ungleichung $|a_n| \leq n$ für $f \in S$ reduzieren. In Bieberbachs Artikel (1916) stand die Fußnote: „Vielleicht ist überhaupt $k_n = n$ “. Wir werden am Ende dieser Vorlesung diese Vermutung beweisen.

Um in einem ersten Schritt die Bieberbachsche Vermutung für den zweiten Koeffizienten zu beweisen, betrachtet man zunächst eine Ungleichung in Σ , den sogenannten *Flächensatz*.

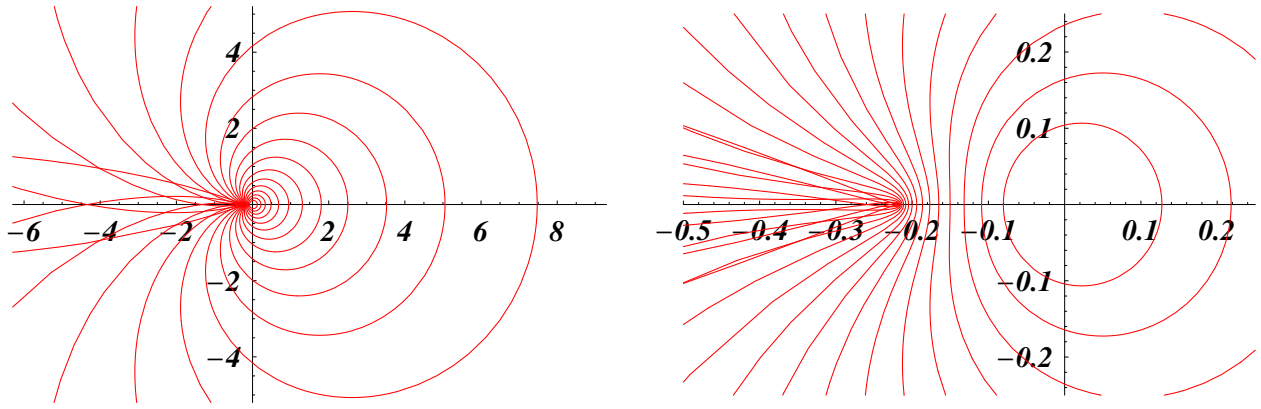


Abbildung 6: Bilder konzentrischer Kreislinsen unter der multivariaten Funktion $h_\alpha(z)$ für $\alpha > 2$

Satz 27 (Flächensatz) Sei $g(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \in \Sigma$ und sei $G = \mathbb{C} \setminus g(\Delta)$. Dann gilt

$$\text{area}(G) = \pi \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \right). \quad (17)$$

Insbesondere gilt also die Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \leq 1 \quad (18)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn der Flächeninhalt von G gleich 0 ist.

Beweis: Sei

$$G_r := \mathbb{C} \setminus \{g(z) \mid |z| \geq r\}.$$

Wir erklären zunächst den betrachteten Flächeninhalt als⁸

$$\text{area}(G) := \lim_{r \rightarrow 1} \text{area}(G_r) = \bigcap_{r > 1} G_r.$$

Wir benutzen nun den Satz von Green, um den Flächeninhalt von G_r zu bestimmen, der von der analytischen Kurve $\Gamma_r := \partial G_r$ berandet wird.⁹ Wir erhalten für alle $r > 1$

$$\begin{aligned} \text{area}(G_r) &= \int_{\text{int}(g(|z|=r))} du dv = \frac{1}{2} \int_{g(|z|=r)} u dv - v du = \text{Re} \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_r} \bar{w} dw = \frac{1}{2i} \int_{|z|=r} \overline{g(z)} g'(z) dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(r e^{-i\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n r^{-n} e^{in\theta} \right) \cdot \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} k b_k r^{-(k+1)} e^{-i(k+1)\theta} \right) r e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(r e^{-i\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n r^{-n} e^{in\theta} \right) \cdot \left(r e^{i\theta} - \sum_{k=1}^{\infty} k b_k r^{-k} e^{-ik\theta} \right) d\theta \\ &= \pi \left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 r^{-2n} \right). \end{aligned}$$

Mit $r \rightarrow 1$ folgt (17). Da der Flächeninhalt ≥ 0 ist, gilt (18). □

⁸Mit dieser Definition kommen wir ohne den Begriff des Lebesgueintegrals aus.

⁹Achtung: Hier benötigt man den Jordanschen Kurvensatz, der besagt, dass jede stetige doppelunktpunktfreie und geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$ ein „Inneres“ und ein „Äußeres“ besitzt.



Abbildung 7: Ludwig Bieberbach

Beispiel 28 Wir sehen uns einen Fall des Flächensatzes besonders an. Aus der Ungleichung (18) folgt insbesondere, dass $b_1 \leq 1$ ist. In diesem Fall kann Gleichheit nur eintreten, falls $b_1 = e^{i\theta}$ ist und alle weiteren Koeffizienten verschwinden, falls also $b_2 = b_3 = \dots = 0$ ist. Es ist dann also $g(z) = z + e^{i\theta}/z$. Diese Funktion ist für $\theta = 0$ in Abbildung 8 dargestellt. Für $|z| = 1$, $z = e^{it}$, hat diese Abbildung reelle Werte:

$$g(z) = z + \frac{1}{z} = e^{it} + e^{-it} = 2 \cos t \in [-2, 2],$$

es ist also $g(\Delta) = \hat{\mathbb{C}} \setminus [-2, 2]$.

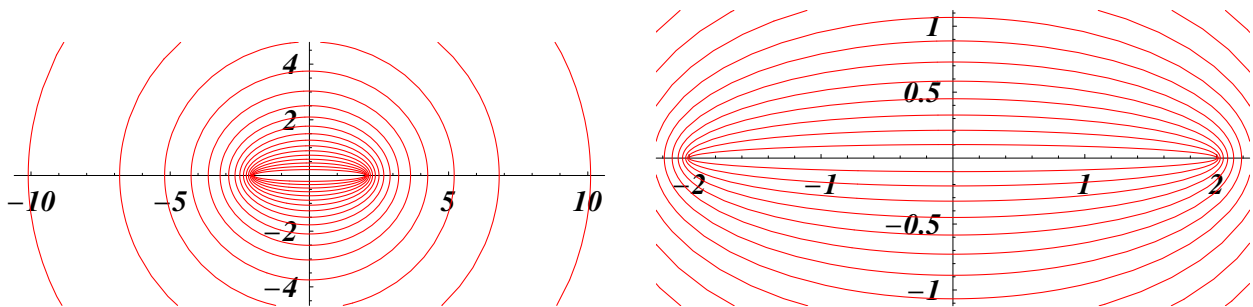


Abbildung 8: Bilder konzentrischer Kreislinien unter der externen Koebeffunktion $g(z) = z + \frac{1}{z}$

Wir nutzen nun den Flächensatz, um das Bieberbachsche Koeffizientenproblem für $n = 2$ zu lösen.

Satz 29 (Bieberbach 1916) Sei $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \in S$. Dann gilt $|a_2| \leq 2$ mit Gleichheit genau dann, wenn f eine Drehung der Koebeffunktion ist $f(z) = e^{-i\theta} K(e^{i\theta} z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2}$.

Beweis: Für jede Funktion $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \in S$ ist die ungerade Funktion

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{f(1/z^2)}} = z - \frac{a_2}{2} \frac{1}{z} + \frac{3a_2^2 - 4a_3}{8} \frac{1}{z^3} + \dots \in \Sigma. \quad (19)$$

Dies sieht man wie folgt ein: Zunächst ist mit $f \in S$ die Funktion

$$h(z) = z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} = z + \frac{a_2}{2} z^3 + \dots \in S_u \subset S \quad (20)$$

eine ungerade schlichte Funktion. Die Menge der ungeraden schlichten Funktionen bezeichnen wir mit S_u . Sie besteht genau aus denjenigen schlichten Funktionen, deren Bildgebiet symmetrisch zum Ursprung ist. Die Transformation (20) nennen wir *Quadratwurzeltransformation*.

Als nächstes sieht man ein, dass für $f \in S$ die Funktion

$$g(z) = \frac{1}{f(1/z)} = z - a_2 + \frac{a_2^2 - a_3}{z} + \dots \in \Sigma$$

ist. Führt man beide Transformationen hintereinander aus, erhält man (19).

Auf die Funktion g aus (19) lässt sich also der Flächensatz anwenden. Wir erhalten somit u. a. $|a_2| \leq 2$. Die Gleichheitsaussage folgt direkt aus Beispiel 28. $\square$

Beispiel 30 Die *Quadratwurzeltransformation* transformiert das Bildgebiet von f in folgender Form: Das Gebiet wird winkelmäßig um den Faktor 2 gestaucht und dann wird das entstehende Gebiet verdoppelt, so dass das resultierende Bildgebiet symmetrisch zum Ursprung ist.

Das Bildgebiet der Quadratwurzeltransformation der Koebeffunktion

$$h(z) = z \sqrt{\frac{K(z^2)}{z^2}} = z \sqrt{\frac{1}{(1-z^2)^2}} = \frac{z}{1-z^2}$$

hat also zwei Schlitzte, welche auf der imaginären Achse liegen.

Analog kann man die Transformation

$$h(z) := z \sqrt[m]{\frac{K(z^m)}{z^m}}$$

verwenden, welche das Gebiet $f(\mathbb{D})$ m -fach symmetrisiert. Beispiele s. Abbildung 9.

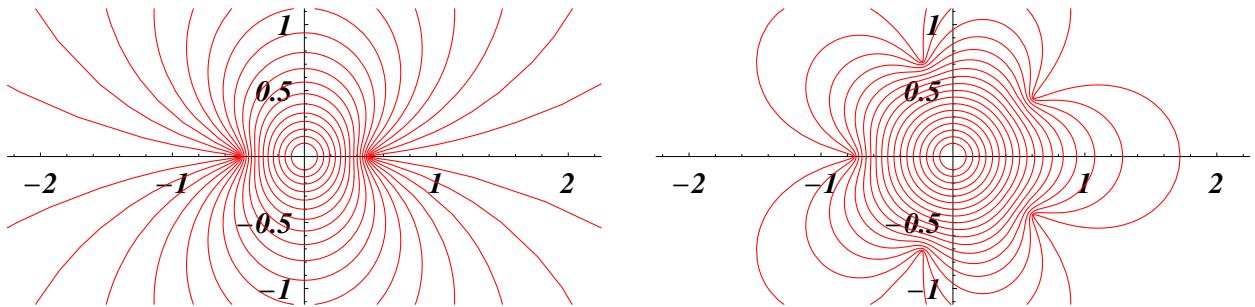


Abbildung 9: Bilder konzentrischer Kreislinsen unter der gedrehten Version der Quadratwurzeltransformation der Koebeffunktion $\frac{z}{1+z^2}$ sowie der 5-fach symmetrischen Variante

Wir wollen nun die Information über die zweite Ableitung $a_2 = \frac{f''(0)}{2}$ mithilfe eines Automorphismus vom Ursprung an eine Stelle $z \in \mathbb{D}$ transferieren. Dies resultiert in einer Abschätzung für die zweite Ableitung $f''(z)$ und liefert schließlich die folgenden **Verzerrungssätze**.

Satz 31 (Koebescher Verzerrungssatz) Für $f \in S$ und $|z| = r$ gilt die Ungleichung

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2}. \quad (21)$$

Hieraus erhalten wir die **Verzerrungssätze**

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (22)$$

sowie

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}. \quad (23)$$

Gleichheit in einer dieser Ungleichungen gilt nur, wenn f eine Drehung der Koebefunktion ist.

Beweis: Sei $f \in S$ und $\zeta \in \mathbb{D}$. Dann ist die Abbildung

$$F(z) := \frac{f\left(\frac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}\right) - f(\zeta)}{(1-|\zeta|^2)f'(\zeta)} = z + \frac{1}{2} \left((1-|\zeta|^2) \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - 2\bar{\zeta} \right) z^2 + \dots \in S,$$

als renormierte Komposition mit einem Automorphismus wieder ein Element von S . Wir nennen $F(z)$ die **Koebetransformation** von $f(z)$. Die Bildgebiete von F und f sind ähnlich, und wenn zwei Funktionen in S ähnliche Bildgebiete haben, sind sie Koebetransformationen voneinander.

Hieraus folgt

$$\left| (1-|\zeta|^2) \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - 2\bar{\zeta} \right| \leq 4,$$

und nach Multiplikation mit $\frac{\zeta}{1-|\zeta|^2}$ und Ersetzen von ζ durch z folgt die Behauptung (21).

Da aus $|w| \leq c$ die Ungleichungen $-c \leq \operatorname{Re}(w) \leq c$ folgen, erhalten wir weiter

$$\frac{2r^2 - 4r}{1-r^2} \leq \operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2r^2 + 4r}{1-r^2}.$$

Da $f'(z) \neq 0$ für $z \in \mathbb{D}$ und da ferner $f'(0) = 1$ ist, ist die Funktion $\ln f'(z)$ analytisch in $\mathbb{D}$ mit $\ln f'(0) = 0$. Nun ist für $z = re^{i\theta}$

$$r \frac{\partial}{\partial r} (\operatorname{Re} \ln f'(z)) = \operatorname{Re} \left(re^{i\theta} \frac{f''(z)}{f'(z)} \right)$$

und wir erhalten wegen $\operatorname{Re} \ln w = \ln |w|$ daher nach Division durch $r \neq 0$ für $z \neq 0$

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \ln |f'(z)| \leq \frac{2r+4}{1-r^2}.$$

Wir integrieren diese Ungleichungen nun im Intervall $r \in [0, R]$ und erhalten

$$\ln \frac{1-R}{(1+R)^3} \leq \ln |f'(Re^{i\theta})| \leq \ln \frac{1+R}{(1-R)^3}.$$

Hieraus folgt (22) durch Exponentiation.

Eine weitere Integration liefert schließlich die rechte Seite von (23):

$$|f(Re^{i\theta})| \leq \int_0^R |f'(re^{i\theta})| dr \leq \int_0^R \frac{1+r}{(1-r)^3} dr = \frac{R}{(1-R)^2}.$$

Die linke Seite ist komplizierter zu zeigen. Sei $r \in (0, 1)$ gegeben und z_0 mit $|z_0| = r$ so gewählt, dass $f(z_0)$ der dem Ursprung nächst gelegene Punkt der Bildkurve $f(re^{i\theta})$ ist. Da f injektiv ist, liegt das Urbild γ der Strecke $[0, f(z_0)]$ im Kreis $\mathbb{D}_r$. Also folgt mit dem Verzerrungssatz (22)

$$|f(z_0)| = \int_0^{f(z_0)} |dw| = \int_\gamma |f'(z)| |dz| \geq \int_\gamma \frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} |dz| \geq \int_0^r \frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} d|z| = \frac{r}{(1 + r)^2} .$$

Alle Verzerrungssätze folgen aus Satz 29 und können somit nur dann scharf sein, wenn f eine Drehung der Koebeffunktion ist. $\square$

Wir erinnern zunächst einmal daran, dass wir die Ungleichung (23) verwendet haben, um die Kompaktheit von S zu beweisen, s. (15).

Als direkte Konsequenz des Verzerrungssatzes bekommen wir den

Satz 32 (Koebescher 1/4-Satz) *Sei $f \in S$. Dann ist der Abstand des Randes des Bildgebiets $\partial f(\mathbb{D})$ vom Ursprung mindestens $1/4$, genauer*

$$\frac{1}{4} \leq \text{dist}(0, \partial f(\mathbb{D})) \leq 1 .$$

Gleichheit links gilt nur für Drehungen der Koebeffunktion, und Gleichheit rechts gilt nur für die Identität.

Beweis: Da f injektiv ist, erhalten wir aus dem Verzerrungssatz

$$\text{dist}(0, \partial f(\mathbb{D})) = \liminf_{r \rightarrow 1} |f(re^{i\theta})| \geq \lim_{r \rightarrow 1} \frac{r}{(1 + r)^2} = \frac{1}{4} .$$

Auf der anderen Seite ist (wieder wegen der Injektivität) $\frac{f(z)}{z}$ eine von Null verschiedene analytische Funktion. Die Ungleichung

$$\text{dist}(0, \partial f(\mathbb{D})) = \liminf_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| = \liminf_{|z| \rightarrow 1} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1 .$$

folgt dann aus dem Minimumprinzip. Auf einen Beweis der Gleichheitsaussage verzichten wir. $\square$

Beispiel 33 *Das Bildgebiet der Koebeffunktion hat offenbar den minimalen Abstand zum Ursprung. Wir betrachten nun die m -fach symmetrischen Versionen der Koebeffunktion. Für sie gilt*

$$\text{dist}(0, \partial f(\mathbb{D})) = \frac{1}{\sqrt[m]{4}} .$$

Diese streben mit $m \rightarrow \infty$ offenbar gegen die identische Abbildung

$$\frac{z}{(1 - z^m)^{2/m}} \rightarrow z ,$$

und der Abstand des Randes des Bildgebiets vom Ursprung strebt gegen 1. Insbesondere hat die Quadratwurzeltransformation der Koebeffunktion den Abstand $1/2$ vom Ursprung.

6 Schlichte Funktionen mit speziellen Bildgebieten

In diesem Kapitel wollen wir uns nun mit schlichten Funktionen beschäftigen, deren Bildgebiete spezielle geometrische Eigenschaften haben.

6.1 Konvexe Funktionen

In diesem Abschnitt behandeln wir *konvexe Funktionen*, dies sind schlichte Funktionen, welche konvexe Bildgebiete haben. Sei also

$$K := \{f \in S \mid f(\mathbb{D}) \text{ konvex}\}.$$

Es wird sich herausstellen, dass mit $f(\mathbb{D})$ auch $f(\mathbb{D}_r)$ konvex ist (Schwarzsches Lemma), woraus sich eine analytische Charakterisierung der konvexen Funktionen ergibt.

Satz 34 (Charakterisierung konvexer Funktionen) Sei $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \in N$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (a) $f \in K$;
- (b) $f \in S$ und $f(\mathbb{D}_r)$ ist konvex für $0 < r < 1$;
- (c) $1 + z \frac{f''}{f'} \in P$.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b): Sei $r \in (0, 1)$ gegeben und sei $z_1 \neq z_2$ mit $|z_1| \leq |z_2| < r$. Seien $w_1 = f(z_1)$ und $w_2 = f(z_2)$. Dann ist wegen der Konvexität des Bildgebiets $f(\mathbb{D})$ für $t \in [0, 1]$ der Punkt $w_0 := tw_1 + (1-t)w_2 \in f(\mathbb{D})$. Also gibt es ein eindeutiges Urbild $z_0 \in \mathbb{D}$ mit $f(z_0) = w_0$. Wir müssen zeigen, dass der Punkt z_0 sogar in $\mathbb{D}_r$ liegt.

Die Funktion

$$g(z) := tf\left(\frac{z_1}{z_2}z\right) + (1-t)f(z)$$

ist analytisch in $\mathbb{D}$ und hat die Eigenschaften $g(0) = 0$ sowie $g(z_2) = w_0$. Nun betrachten wir die Funktion $h := f^{-1} \circ g$, die wegen $f \in K$ wohldefiniert ist. Diese Funktion hat aber die Eigenschaften $h(0) = 0$ und $|h(z)| \leq 1$. Also folgt aus dem Schwarzschen Lemma, dass sogar $|h(z)| \leq |z|$ gilt, und es ist insbesondere

$$|z_0| = |f^{-1}(w_0)| = |f^{-1}(g(z_2))| = |h(z_2)| \leq |z_2| < r,$$

was zu zeigen war.

(b) $\Rightarrow$ (c): Sei $r \in (0, 1)$. f bildet die Kreislinie $re^{i\theta}$ auf eine konvexe Kurve ab. Die Konvexität besagt nun, dass das Argument der Tangente der Kurve $\gamma_r = f(re^{i\theta})$ mit wachsendem θ wachsen muss. Dies entspricht der Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\arg \frac{\partial}{\partial \theta} f(re^{i\theta}) \right) \geq 0.$$

Wir formen um und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\arg \frac{\partial}{\partial \theta} f(re^{i\theta}) \right) &= \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\ln \frac{\partial}{\partial \theta} f(re^{i\theta}) \right) \\ &= \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\ln(i re^{i\theta} f'(re^{i\theta})) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Das Resultat folgt nun mit dem Minimumprinzip.

(c) $\Rightarrow$ (a): Sei $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \in A$ mit $p := 1 + z \frac{f''}{f'} \in P$. Die obige Rechnung zeigt, dass das Argument der Tangente der Kurve γ_r mit wachsendem θ wächst. Dies liefert die Konvexität von γ_r .

Der Gesamtzuwachs des Arguments der Kurventangente auf γ_r bei einem Umlauf ergibt sich zu

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\arg \frac{\partial}{\partial \theta} f(re^{i\theta}) \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} p(re^{i\theta}) d\theta = \operatorname{Re} \int_{|z|=r} \frac{p(z)}{iz} dz = \operatorname{Re} \int_{|z|=r} \frac{1}{iz} dz = 2\pi.$$

Somit ist f in $\mathbb{D}_r$ injektiv. Mit $r \rightarrow 1$ folgt $f \in K$. □

Beispiel 35 Lässt man bei der Sektorabbildung

$$h_\alpha(z) := \frac{1}{2\alpha} \left(\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\alpha - 1 \right)$$

den Öffnungswinkel gegen 0 streben, so strebt das zugehörige Bildgebiet offenbar gegen einen Parallelstreifen, da die Spitze gegen ∞ strebt. Die zugehörige Abbildungsfunktion

$$h_0(z) := \lim_{\alpha \rightarrow 0} h_\alpha(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \in K$$

ist damit offenbar konvex, s. Abbildung 10.

Eine weitere wichtige konvexe Funktion ist die Halbebenenabbildung

$$f(z) = h_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \in K.$$

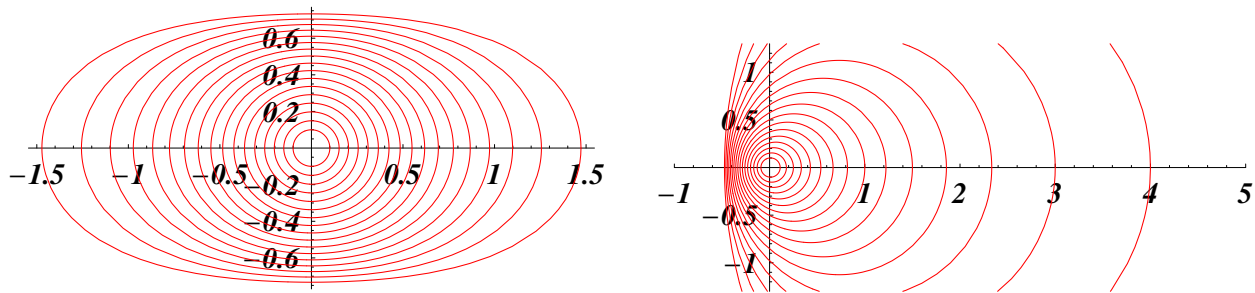


Abbildung 10: Bilder konzentrischer Kreislinien bei der Parallelstreifen- und bei der Halbebenenabbildung

K ist als abgeschlossene Teilmenge von S natürlich kompakt. Wir wollen nun das Koeffizientenproblem in K lösen. Wir erhalten

Satz 36 (Koeffizienten konvexer Funktionen, Löwner 1917) Sei $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \in K$. Dann gilt $|a_n| \leq 1$. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn f eine Drehung von h_1 , also eine Halbebenenabbildung, ist: $f(z) = e^{-i\theta} h_1(e^{i\theta} z)$.

Beweis: Die Koeffizienten p_n der Funktion

$$p(z) = 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

sind wegen Satz 15 durch 2 beschränkt. Daher erhalten wir aus der Gleichung $z f''(z) = f'(z) (p(z) - 1)$ durch Koeffizientenvergleich (und mittels Cauchyprodukt) die Rekursion

$$n(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}p_{n-k}.$$

Wir führen jetzt einen Induktionsbeweis. Der Induktionsanfang ist wegen $a_1 = 1$ erfüllt. Gelte nun also $|a_k| \leq 1$ für $k = 1, \dots, n$. Dann erhalten wir

$$n(n+1)|a_{n+1}| \leq \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)|a_{k+1}||p_{n-k}| \leq \sum_{k=0}^{n-1} 2(k+1) = n(n+1).$$

Damit ist die Induktion vollständig.

Dass für Halbebenenabbildungen Gleichheit eintritt, ist offensichtlich. Gleichheit kann offenbar nur dann eintreten, wenn $|p_1| = 2$ ist. Hieraus folgt aus Satz 12

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1 + e^{i\theta} z}{1 - e^{i\theta} z},$$

also die Behauptung. □

Als nächstes wollen wir einen Satz von Strohacker herleiten, der uns in die Lage versetzen wird, die abgeschlossene konvexe Hülle von K sowie die zugehörigen Extrempunkte genau anzugeben.

Satz 37 (Eigenschaften konvexer Funktionen) Sei $f \in K$ und seien $z, \zeta \in \mathbb{D}$. Dann gilt

$$(a) \text{ (Sheil-Small (1969), Suffridge (1970))}: \quad \operatorname{Re} \left(\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta} \right) > 0.$$

Als Folgerungen erhalten wir

$$(b) \text{ (Marx 1932/33)}: \quad \operatorname{Re} z \frac{f'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2};$$

$$(c) \text{ (Strohacker 1933)}: \quad \operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}.$$

Beweis: (a) Die betrachtete Funktion

$$F(z, \zeta) := \frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta} = \frac{2zf'(z)(z-\zeta) - (f(z)-f(\zeta))(z+\zeta)}{(f(z)-f(\zeta))(z-\zeta)}$$

ist für $z, \zeta \in \mathbb{D}$ analytisch, da f injektiv ist (daher wird der Nenner nicht gleich 0) und da der Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow z} F(z, \zeta) &= \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{2zf'(z)(z-\zeta) - (f(z)-f(\zeta))(z+\zeta)}{(f(z)-f(\zeta))(z-\zeta)} \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{-2zf'(z) - (f(z)-f(\zeta)) + (z+\zeta)f'(\zeta)}{f(\zeta)-f(z) - (z-\zeta)f'(\zeta)} \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{2f'(\zeta) + (z+\zeta)f''(\zeta)}{2f'(\zeta) - (z-\zeta)f''(\zeta)} = 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \end{aligned}$$

existiert, was wir mit einer zweifachen Anwendung der komplexen Variante der Regel von de l'Hospital bewiesen haben. Da $\gamma_r = f(re^{i\theta})$ konvex ist, wächst also $\arg(f(re^{it}) - f(re^{i\theta}))$ für $t \in (\theta, \theta + 2\pi)$, woraus für $z = re^{it} \neq \zeta = re^{i\theta}$ die Ungleichung

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)} = \frac{\partial}{\partial t} \arg(f(re^{it}) - f(re^{i\theta})) \geq 0$$

folgt. Weiter ist $\operatorname{Re} \frac{z+\zeta}{z-\zeta} = 0$ für $|z| = |\zeta| = r$, so dass

$$\operatorname{Re} F(z, \zeta) \geq 0 \quad \text{für } |z| = |\zeta| = r < 1.$$

Wir wenden nun das Minimumprinzip bzgl. beider Variablen z und ζ an und schließen also, dass sogar

$$\operatorname{Re} F(z, \zeta) \geq 0 \quad \text{für } z, \zeta \in \mathbb{D}_r.$$

Das Resultat $\operatorname{Re} F(z, \zeta) \geq 0$ folgt dann für $r \rightarrow 1$. Dass sogar $\operatorname{Re} F(z, \zeta) > 0$ gilt, ist wieder eine Folge des Minimumprinzips. Also ist für $\zeta \in \mathbb{D}$ die Funktion $F(z, \zeta) \in P$.

(b): Dies ist der Spezialfall $\zeta = 0$ in (a).

(c): Sei $\zeta \in \mathbb{D}$. Die Taylordarstellung von $F(z, \zeta)$ bzgl. z ist

$$F(z, \zeta) = 1 + 2 \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{f(\zeta)} \right) z + \cdots \in P,$$

also ist wegen (a) der erste Koeffizient durch 2 beschränkt oder

$$\left| \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{f(\zeta)} \right| \leq 1.$$

Somit ist $\omega(z) := z \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f(z)} \right)$ eine Funktion, welche dem Schwarzschen Lemma genügt. Dann ist aber

$$\frac{1 + \omega(z)}{1 - \omega(z)} \in P \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Re} \frac{2f(z) - z}{z} > 0,$$

woraus die Behauptung $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}$ folgt. □

Nun können wir die abgeschlossene konvexe Hülle von K beschreiben.

Satz 38 (Extrempunkte von K) Für die abgeschlossene konvexe Hülle von K und ihre Extrempunkte gilt

$$(a) \quad \overline{\operatorname{co}} K = \left\{ f \in N \mid \operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2} \right\} = \left\{ f \in A \mid \frac{f(z)}{z} \prec \frac{1}{1-z} \right\};$$

$$(b) \quad \operatorname{E} \overline{\operatorname{co}} K = \left\{ \frac{z}{1 - e^{it}z} \mid t \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Beweis: Die Abbildung $p \mapsto \frac{z}{2}(1 + p)$ bildet die Menge $P \subset A$ ab auf die kompakte konvexe Menge

$$Q := \left\{ f \in N \mid \operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2} \right\}.$$

Die Darstellung von Q mittels Subordination folgt aus dem Subordinationsprinzip.

Gemäß Satz 37 (c) ist $K \subset Q$ und daher auch $\overline{\operatorname{co}} K \subset Q$. Transformiert man nun die Riesz-Herglotz-Darstellung

$$P = \left\{ p \in A \mid p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{it}z}{1 - e^{it}z} d\mu(t) \right\}$$

nach Q , so erhält man wegen

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{z}{2} (1 + p(z)) = \frac{z}{2} \left(1 + \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{it}z}{1 - e^{it}z} d\mu(t) \right) \\ &= \frac{z}{2} \left(\int_0^{2\pi} d\mu(t) + \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{it}z}{1 - e^{it}z} d\mu(t) \right) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{z}{1 - e^{it}z} d\mu(t) \end{aligned}$$

die Darstellung

$$Q = \left\{ q \in A \mid q(z) = \int_0^{2\pi} \frac{z}{1 - e^{it}z} d\mu(t) \right\} .$$

Die Menge der Extrempunkte von Q kann man nun – wie beim Satz von Herglotz – direkt ablesen, und wir erhalten

$$E(Q) = \left\{ \frac{z}{1 - e^{it}z} \mid t \in [0, 2\pi] \right\} .$$

Wegen $E(Q) \subset K$ folgt aus dem Satz von Krein-Milman

$$Q = \overline{\text{co}} E(Q) \subset \overline{\text{co}} K .$$

Zusammen mit $\overline{\text{co}} K \subset Q$ erhalten wir schließlich $\overline{\text{co}} K = Q$. □

Aus diesem Satz folgt nun, dass alle linearen Extremalprobleme in K ausschließlich von den Halbebenenabbildungen gelöst werden, da endliche Konvexkombinationen von Extrempunkten generell nicht konvex sind (Übungsaufgabe!). Dies werden wir in Beispiel 42 nochmals aufgreifen.

6.2 Sternförmige Funktionen

Analog zu den konvexen Funktionen erklären wir *sternförmige Funktionen*. Sei also

$$St := \{ f \in S \mid f(\mathbb{D}) \text{ sternförmig bzgl. } 0 \} .$$

Hierbei heißt das Gebiet G sternförmig bzgl. 0, wenn für alle $t \in [0, 1]$ mit $w \in G$ auch $tw \in G$ liegt. Wir nennen G in Zukunft einfach sternförmig und lassen das „bzgl. 0“ weg. St ist als abgeschlossene Teilmenge von S kompakt. Es wird sich wieder herausstellen, dass mit $f(\mathbb{D})$ auch $f(\mathbb{D}_r)$ sternförmig ist, woraus sich erneut eine analytische Charakterisierung ergibt.

Satz 39 (Charakterisierung sternförmiger Funktionen) Sei $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \in N$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (a) $f \in St$;
- (b) $f \in S$ und $f(\mathbb{D}_r)$ ist sternförmig für $0 < r < 1$;
- (c) $z \frac{f'}{f} \in P$.

Ferner gilt

- (d) **(Alexander 1915)** $g \in K \Leftrightarrow zg'(z) \in St$.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b): Sei $r \in (0, 1)$ gegeben. Sei ferner $t \in [0, 1]$. Dann ist die Funktion $\omega(z) := f^{-1}(tf(z))$ eine Schwarz-Lemma-Funktion. Ist nun $w \in f(\mathbb{D}_r)$, so ist zunächst $z = f^{-1}(w) \in \mathbb{D}_r$ und daher wegen des Schwarzschen Lemmas auch $f^{-1}(tw) = \omega(z) \in \mathbb{D}_r$. Dies bedeutet aber, dass $tw \in f(\mathbb{D}_r)$ liegt. Folglich ist $f(\mathbb{D}_r)$ sternförmig.

(b) $\Rightarrow$ (c): Da $\gamma_r := f(re^{i\theta})$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) sternförmig ist, muss also

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) \geq 0 \tag{24}$$

sein. Dies bedeutet, dass

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) = \text{Im} \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(re^{i\theta}) = \text{Re} z \frac{f'(z)}{f(z)} \geq 0 .$$

Wegen $z \frac{f'}{f}(0) = 1$ liefert das Minimumprinzip folglich $z \frac{f'}{f} \in P$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Unter den gegebenen Voraussetzungen hat f eine einfache Nullstelle am Ursprung und es ist $f(z) \neq 0$ für $z \neq 0$, da sonst f einen Pol in $\mathbb{D}$ hätte. Wegen (24) ist $\arg f(re^{i\theta})$ wachsend und für das Gesamtwachstum bei einem Durchlauf von γ_r folgt

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) d\theta = \operatorname{Re} \frac{1}{i} \int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi.$$

Also bildet f die Kreisscheibe $\mathbb{D}_r$ bijektiv auf ein sternförmiges Gebiet ab.¹⁰ Der Grenzübergang $r \rightarrow 1$ liefert die Behauptung.

(d): Für $f(z) = z g'(z)$ ist offenbar

$$z \frac{f'(z)}{f(z)} = z \frac{g'(z) + z g''(z)}{z g'(z)} = 1 + z \frac{g''(z)}{g'(z)}.$$

Die Charakterisierungen gemäß Satz 34 (c) und Satz 39 (c) liefern hieraus den Satz von Alexander. $\square$

Im Anschluss an Satz 39 erhalten wir diesmal fast automatisch die Koeffizientenaussage für St .

Satz 40 (Koeffizienten sternförmiger Funktionen, Nevanlinna 1920) Sei $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \in St$. Dann gilt $|a_n| \leq n$. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn f eine Drehung der Koebfunktion ist: $f(z) = e^{-i\theta} K(e^{i\theta} z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2}$.

Beweis: Dies folgt direkt aus dem Satz von Alexander, denn für $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ergibt sich $f(z) =$

$$z f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n, \text{ und } g(z) = \frac{z}{1-z} \text{ liefert } f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}. \quad \square$$

Der Satz zeigt insbesondere, dass die Bieberbachsche Vermutung für $f \in St \subset S$ gültig ist! Nun können wir auch die abgeschlossene konvexe Hülle von St beschreiben.

Satz 41 (Extrempunkte von St) Für die abgeschlossene konvexe Hülle von St und ihre Extrempunkte gilt

$$(a) \quad \overline{\operatorname{co}} St = \left\{ f \in A \mid f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{z}{(1 - e^{it} z)^2} d\mu(t), \mu(t) \text{ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß} \right\};$$

$$(b) \quad E \overline{\operatorname{co}} St = \left\{ \frac{z}{(1 - e^{it} z)^2} \mid t \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Beweis: Auch die Information über die abgeschlossene konvexe Hülle und die Extrempunkte kann mit dem Satz von Alexander direkt von K nach St transferiert werden (Übungsaufgabe). $\square$

Beispiel 42 (Verzerrungssätze für Ableitungen in K und St) Da jedes lineare Funktional von einem Extrempunkt maximiert wird, erhalten wir aus Satz 38 für $f \in K$ und für $n \in \mathbb{N}$ den Verzerrungssatz

$$|f^{(n)}(re^{i\theta})| \leq |h_1^{(n)}(re^{i\theta})| \leq h_1^{(n)}(r) = n! \frac{1}{(1-r)^{n+1}}$$

und aus Satz 41 für $f \in St$ und für $n \in \mathbb{N}$ den Verzerrungssatz

$$|f^{(n)}(re^{i\theta})| \leq |K^{(n)}(re^{i\theta})| \leq K^{(n)}(r) = n! \frac{n+r}{(1-r)^{n+2}}.$$

¹⁰Aufgrund der Tatsache, dass das Argumentwachstum 2π nicht überschreitet, kann es keine Selbstdurchdringungen geben.

6.3 Nahezu-konvexe Funktionen

Wir wissen nun, dass sternförmige Funktionen die Bieberbachsche Vermutung erfüllen. Dies wollen wir nun noch auf eine größere Klasse ausdehnen. Hierzu erklären wir folgende Begriffsbildung.

Definition 43 (Nahezu-konvexe Funktionen, Kaplan 1952) Eine Funktion $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \in N$ heißt nahezu-konvex, falls es eine konvexe Funktion $\varphi(z) = z + \varphi_2 z^2 + \dots \in K$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt derart, dass $\operatorname{Re} \left(e^{i\alpha} \frac{f'(z)}{\varphi'(z)} \right) > 0$ ist. Wir bezeichnen die Menge der (normierten) nahezu-konvexen Funktionen mit C .¹¹

Bemerkung 44 Jede sternförmige Funktion $g \in St$ ist nahezu-konvex: $St \subset C$. Dies folgt aus dem Satz von Alexander, denn mit $\varphi(z) \in K$ ist ja $g(z) := z \varphi'(z) \in St$. Also ist $f \in C$ genau dann, wenn $\operatorname{Re} \left(e^{i\alpha} z \frac{f'(z)}{g(z)} \right) > 0$ für eine sternförmige Funktion $g \in St$ ist. Wählt man nun die zu $f \in St$ gehörige sternförmige Funktion $g := f \in St$ und $\alpha = 0$, so sehen wir, dass $f \in C$ ist.

Es ist nun entscheidend, dass nahezu-konvexe Funktionen schlicht sind.

Satz 45 (Kaplan 1952) Es gilt $C \subset S$.

Beweis: Sei $f \in C$ und sei $\varphi \in K$ die zugehörige konvexe Funktion derart, dass $\operatorname{Re} \left(e^{i\alpha} \frac{f'}{\varphi'} \right) > 0$. Dann hat auch die Funktion $h := e^{-i\alpha} \varphi$ ein konvexes Bildgebiet $h(\mathbb{D})$. Wir betrachten die Funktion $g := f \circ h^{-1} : h(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ und erhalten für $w \in h(\mathbb{D})$ und $z = h^{-1}(w) \in \mathbb{D}$

$$\operatorname{Re} g'(w) = \operatorname{Re} \frac{f'(z)}{h'(z)} > 0 .$$

Also gilt für $w_1, w_2 \in h(\mathbb{D})$ die Beziehung

$$\operatorname{Re} \frac{g(w_2) - g(w_1)}{w_2 - w_1} = \operatorname{Re} \frac{1}{w_2 - w_1} \int_{w_1}^{w_2} g'(w) dw = \int_0^1 \operatorname{Re} g'(w_1 + t(w_2 - w_1)) dt > 0 ,$$

wobei wir den geradlinigen Integrationsweg $w(t) = w_1 + t(w_2 - w_1)$ ($t \in [0, 1]$) und damit die Konvexität von $h(\mathbb{D})$ verwendet haben. Also ist g und damit auch $f = g \circ h$ injektiv. $\square$

Als Folgerung haben wir nun also folgende Inklusionskette bewiesen: $K \subset St \subset C \subset S$.

Bevor wir uns etwas genauer die geometrische Beschreibung der Bildgebiete nahezu-konvexer Funktionen ansehen, beweisen wir, dass nahezu-konvexe Funktionen die Bieberbachsche Vermutung erfüllen.

Satz 46 (Koeffizienten nahezu-konvexer Funktionen, Reade 1955) Sei $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \in C$. Dann gilt $|a_n| \leq n$ mit Gleichheit genau für die Drehungen der Koebe-funktion.

Beweis: Sei $p(z) = e^{i\alpha} \frac{z f'(z)}{g(z)}$ mit $g(z) = z + b_2 z^2 + \dots \in St$, $p(z) = e^{i\alpha} + p_1 z + \dots$ und $\operatorname{Re} p(z) > 0$. Dann gilt offenbar

$$z f'(z) = e^{-i\alpha} g(z) p(z)$$

oder koeffizientenweise

$$n a_n = e^{-i\alpha} \left(e^{i\alpha} b_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k p_{n-k} \right) .$$

¹¹Die Verwendung des Buchstabens C rührt von der ursprünglich von Kaplan verwendeten Bezeichnung *close-to-convex* her.

Wegen $|p_k| \leq 2$ (Übungsaufgabe) und $|b_k| \leq k$ ($k \geq 1$) folgt also

$$n |a_n| \leq n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k = n^2 .$$

Den Fall der Gleichheit sieht man leicht ein. □

Wir geben nun eine geometrische Beschreibung der nahezu-konvexen Funktionen, die erneut beweist, dass alle sternförmigen Funktionen auch nahezu-konvex sind.

Satz 47 (Geometrie nahezu-konvexer Funktionen) Sei $f \in N$. Dann ist $f \in C$ genau dann, wenn

$$(a) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) d\theta > -\pi \quad (z = re^{i\theta}), \text{ für alle } r \in (0, 1) \text{ und alle } \theta_1 < \theta_2$$

oder wenn

$$(b) \text{ das Komplement von } f(\mathbb{D}) \text{ die Vereinigung paarweise disjunkter Halbstrahlen ist.}$$

Beweis: (a): Der Beweis benutzt folgenden

Hilfssatz 48 Sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t) + 2\pi$ und

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) > -\pi \quad (t_1 < t_2) .$$

Dann gibt es eine stetige und wachsende Funktion $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\psi(t + 2\pi) = \psi(t) + 2\pi$ und $|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \pi/2$.

Beweis: Die Funktion

$$\psi(t) := \max_{s \leq t} \varphi(s) - \frac{\pi}{2}$$

hat die angegebenen Eigenschaften (Übungsaufgabe). □

Beweis von Satz 47 (a) „ $\Rightarrow$ “: Wir benutzen wieder die Beziehung

$$\operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\arg \frac{\partial}{\partial \theta} f(re^{i\theta}) \right) ,$$

so dass die linke Seite von (a) sich umformen lässt in

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) d\theta = \arg \frac{\partial}{\partial \theta} f(re^{i\theta}) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} .$$

Sei nun $f \in C$ und $h := e^{-i\alpha} f$ die hierzu gehörige konvexe Funktion mit $\operatorname{Re} \frac{f'(z)}{h'(z)} > 0$. Dann gilt also

$$|\arg f'(z) - \arg h'(z)| < \frac{\pi}{2} .$$

Wir setzen

$$F(r, \theta) := \arg \left(\frac{\partial}{\partial \theta} f(re^{i\theta}) \right) = \arg f'(re^{i\theta}) + \frac{\pi}{2} + \theta$$

sowie

$$H(r, \theta) := \arg \left(\frac{\partial}{\partial \theta} h(re^{i\theta}) \right) = \arg h'(re^{i\theta}) + \frac{\pi}{2} + \theta .$$

Da h konvex ist, ist $H(r, \theta)$ eine wachsende Funktion bzgl. θ , und die Nahezu-Konvexität besagt

$$|F(r, \theta) - H(r, \theta)| < \frac{\pi}{2} .$$

Also gilt für $\theta_1 < \theta_2$ die Beziehung

$$\begin{aligned} F(r, \theta_2) - F(r, \theta_1) &= \left(F(r, \theta_2) - H(r, \theta_2) \right) + \left(H(r, \theta_2) - H(r, \theta_1) \right) + \left(H(r, \theta_1) - F(r, \theta_1) \right) \\ &> -\frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{2} = -\pi, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

„ $\Leftarrow$ “ Gelte nun also für $\theta_1 < \theta_2$ die Beziehung

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) d\theta > -\pi \quad (z = re^{i\theta}). \quad (25)$$

Wir müssen in diesem Fall die zu f gehörige konvexe Funktion h konstruieren. Wir erklären zunächst für $z = re^{i\theta}$

$$\varphi_r(t) := \int_0^t \operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) d\theta.$$

Da $f'(z) \neq 0$ ist, ist also $\arg f'(re^{i\theta})$ eine periodische Funktion bzgl. θ und damit

$$\varphi_r(t + 2\pi) - \varphi_r(t) = F(r, t + 2\pi) - F(r, t) = 2\pi.$$

Die Beziehung (25) ergibt für $t_1 < t_2$ die Ungleichung $\varphi_r(t_2) - \varphi_r(t_1) > -\pi$. Hilfssatz 48 liefert zu φ_r eine stetige und wachsende Funktion ψ_r mit $\psi_r(t + 2\pi) - \psi_r(t) = 2\pi$ und

$$|\varphi_r(t) - \psi_r(t)| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Für einen festen Radius $\rho \in (0, 1)$ erklären wir nun mit Hilfe der Poissonschen Integralformel die Funktion

$$G_\rho(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} (\psi_\rho(t) - t) dt \quad (\zeta = \rho e^{it}),$$

welche im Kreis $\mathbb{D}_\rho$ analytisch ist. Für den Realteil dieser Funktion gilt

$$\operatorname{Re} G_\rho(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\rho(r, \theta - t) (\psi_\rho(t) - t) dt,$$

wobei

$$P_\rho(r, \theta) := \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2r\rho \cos \theta + r^2}$$

der Poissonkern der Kreisscheibe $\mathbb{D}_\rho$ ist. Da die Funktion $\psi_\rho(t) - t$ periodisch und ψ_ρ wachsend ist, liefert eine partielle Integration

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Re} G_\rho(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^{2\pi} P_\rho(r, \theta - t) (\psi_\rho(t) - t) dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} P_\rho(r, \theta - t) (\psi_\rho(t) - t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\rho(r, \theta - t) d(\psi_\rho(t) - t) \\ &> -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\rho(r, \theta - t) dt = -1. \end{aligned}$$

Wir erhalten daher für die Funktion $h_\rho : \mathbb{D}_\rho \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$h_\rho(z) := e^{i\alpha_\rho} \int_0^z e^{iG_\rho(\zeta)} d\zeta,$$

wobei $\alpha_\rho \in \mathbb{R}$ noch zu bestimmen sein wird, die Beziehung

$$\operatorname{Re} \left(1 + z \frac{h''_\rho(z)}{h'_\rho(z)} \right) = 1 + \operatorname{Re} (izG'_\rho(z)) = 1 + \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial \theta} G_\rho(re^{i\theta}) > 0 .$$

Also ist $h_\rho(z)$ konvex in $\mathbb{D}_\rho$. Für die Argumente der Ableitungen von h_ρ und von f gilt weiter

$$\arg h'_\rho(z) = \alpha_\rho + \operatorname{Re} G_\rho(z)$$

sowie

$$\arg f'(re^{i\theta}) = F(r, \theta) - \frac{\pi}{2} - \theta = \varphi_r(\theta) + F(r, 0) - \frac{\pi}{2} - \theta .$$

Da $\arg f'(z) = \operatorname{Im} \ln f'(z)$ harmonisch ist, hat diese Funktion ebenfalls eine Poisson-Darstellung in $\mathbb{D}_\rho$

$$\arg f'(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\rho(r, \theta - t) \arg f'(\rho e^{it}) dt .$$

Wenn wir nun $\alpha_\rho := F(\rho, 0) - \frac{\pi}{2}$ setzen, so erhalten wir schließlich für $z = re^{i\theta}$ mit $r < \rho$

$$\begin{aligned} \arg f'(z) - \arg h'_\rho(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\rho(r, \theta - t) \left(\arg f'(\rho e^{it}) - (\alpha_\rho + \psi_\rho(t) - t) \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\rho(r, \theta - t) \left(\varphi_\rho(t) - \psi_\rho(t) \right) dt . \end{aligned}$$

Wegen $|\varphi_\rho(t) - \psi_\rho(t)| \leq \frac{\pi}{2}$ folgt schließlich in $\mathbb{D}_\rho$

$$|\arg f'(z) - \arg h'_\rho(z)| \leq \frac{\pi}{2} .$$

Mit einem Standardkompaktheitsargument liefert der lokal gleichmäßige Grenzübergang für $h_\rho(z)$ mit $\rho \rightarrow 1$ die gesuchte in $\mathbb{D}$ konvexe Funktion $h(z)$, für welche gilt

$$|\arg f'(z) - \arg h'(z)| \leq \frac{\pi}{2} .$$

Mit dem Minimumprinzip folgt die Nahezu-Konvexität von f .

(b): Der Beweis von (b) ist leider recht umfänglich, aber dennoch nicht sonderlich erhellend, und wird daher weggelassen. $\square$

Während die Definition der nahezu-konvexen Funktionen eine konvexe Hilfsfunktion benötigt, ist die Eigenschaft aus Teil (a) von Satz 47 eine *intrinsische* geometrische Charakterisierung. Sie kann folgendermaßen geometrisch interpretiert werden: Die Bildgebiete $\gamma_r := f(\mathbb{D}_r)$ einer nahezu-konvexen Funktion haben die Eigenschaft, dass die Tangentenrichtung für keine zwei Randpunkte von γ_r um mehr als 180° fällt, m. a. W.: Haarnadelkurven dürfen also höchstens die Richtung umkehren, aber keinesfalls den Winkel noch stärker zurückdrehen (dies impliziert dann auch wieder die Schlichtheit).

Wir schließen wieder eine Bestimmung der Extrempunkte an.

Satz 49 (Extrempunkte von C) Für die Extrempunkte der abgeschlossenen konvexen Hülle von C gilt

$$\operatorname{E} \overline{\operatorname{co}} C = \left\{ f \in A \left| f(z) = \frac{z - \frac{e^{i\theta} + e^{i\varphi}}{2} z^2}{(1 - e^{i\theta} z)^2} \right. \right\} .$$

Beweis: Für den Beweis benötigen wir folgenden

Hilfssatz 50 Sei $|c| \leq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, und sei

$$F^\alpha := \left\{ f \in A \mid f \prec \left(\frac{1+c z}{1-z} \right)^\alpha \right\}.$$

Dann ist F^α kompakt, und es gilt für alle $\alpha \geq 1$

$$\overline{\text{co}} F^\alpha = G^\alpha := \left\{ f \in A \mid f(z) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+c e^{it} z}{1-e^{it} z} \right)^\alpha d\mu(t), \mu \text{ wachsend mit } \mu(2\pi) - \mu(0) = 1 \right\} \quad (26)$$

und

$$\text{E } \overline{\text{co}} F^\alpha = \left\{ \left(\frac{1+c e^{it} z}{1-e^{it} z} \right)^\alpha \mid t \in [0, 2\pi] \right\}. \quad (27)$$

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall $\alpha = 1$. In diesem Fall ist $F := F^1$ konvex und besteht aus allen Funktionen, deren Bildgebiete in einer vorgegebenen Halbebene liegen. Dies folgt aus der Darstellung

$$\frac{1+c z}{1-z} = \frac{1+c}{2} \frac{1+z}{1-z} + \frac{1-c}{2},$$

welche auch zeigt, dass in diesem Fall die Behauptungen eine direkte Folge des Satzes von Riesz-Herglotz sind.

Sei nun $\alpha > 1$. Die Mengen F^α und G^α sind wohldefiniert, da wegen $|c| \leq 1$ die Funktion $\frac{1+c z}{1-z}$ keine Nullstelle in $\mathbb{D}$ hat. Ferner ist F^α nicht konvex und wir müssen zeigen, dass die abgeschlossene konvexe Hülle von F^α die Menge G^α ist. Zunächst ist $G^\alpha \subset \overline{\text{co}} F^\alpha$, da jede Funktion aus G^α lokal gleichmäßige Grenzfunktion von Konvexkombinationen von Funktionen aus F^α ist.

Wir werden als nächstes zeigen, dass aus $f \notin \text{E } F$ folgt, dass auch $f^\alpha \notin \text{E } F^\alpha$ liegt. Sei also $f \notin \text{E } F$. Dann gibt es $t \in (0, 1)$ und $f_1, f_2 \in F$ mit

$$f = t f_1 + (1-t) f_2.$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit $f^{\alpha-1}$

$$f^\alpha = t f_1 f^{\alpha-1} + (1-t) f_2 f^{\alpha-1}, \quad (28)$$

wobei die beiden Funktionen $f_1 f^{\alpha-1}$ und $f_2 f^{\alpha-1}$ verschieden sind. Wir wollen zeigen, dass (28) eine Konvexkombination in F^α ist. Die Funktion

$$h := \ln \frac{1+c z}{1-z}$$

ist konvex: Sie ist für $|c| = 1$ eine Parallelstreifenabbildung, s. Abbildung 11, und mit

$$1 + z \frac{h''(z)}{h'(z)} = \frac{1+c z^2}{(1-z)(1+c z)} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+c z} - 1$$

für $|c| \leq 1$ wegen $\text{Re } \frac{1}{1-z} > 0$ konvex.

Daher gilt für die Konvexkombination (α ist ja größer als 1)

$$\frac{1}{\alpha} \ln f_{1,2} + \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \ln f \prec \ln \frac{1+c z}{1-z}$$

und somit nach Exponentiation auch

$$f_{1,2}^{1/\alpha} f^{1-\frac{1}{\alpha}} \prec \frac{1+c z}{1-z}.$$

Potenzieren mit dem Exponenten α liefert schließlich $f_{1,2} f^{\alpha-1} \in F^\alpha$. Also ist (28) eine konvexe Darstellung von f^α in F^α und folglich ist $f^\alpha \notin \text{E } F^\alpha$.

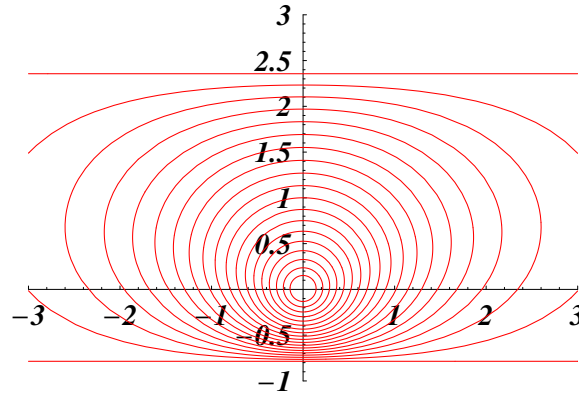


Abbildung 11: Bilder konzentrischer Kreislinien bei der betrachteten Parallelstreifenabbildung

Dies liefert schließlich

$$E F^\alpha \subset \{f^\alpha \mid f \in E F\} = E G^\alpha \subset F^\alpha ,$$

und mit dem Satz von Krein-Milman folgt

$$\overline{\text{co}} F^\alpha = \overline{\text{co}} E F^\alpha \subset \overline{\text{co}} E G^\alpha = G^\alpha \subset \overline{\text{co}} F^\alpha .$$

Wir merken noch an, dass die Behauptung des Hilfssatzes für alle $\alpha \in (0, 1)$ falsch ist. In diesem Fall ist F^α konvex, und es gibt viel mehr Extrempunkte. $\square$

Nun zum Beweis von Satz 49.

„ $\Leftarrow$ “: Nach Voraussetzung ist

$$f'(z) = h'(z) p(z)$$

für eine konvexe Funktion $h(z) \in K$ und eine Funktion $p(z) \prec \frac{1+cz}{1-z}$ für ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$.

Aus Satz 38 folgt eine Darstellung

$$h'(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 - e^{it}z)^2} d\mu_1(t) ,$$

und aus Hilfssatz 50 (für $\alpha = 1$) folgt eine Darstellung

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + c e^{i\theta} z}{1 - e^{i\theta} z} d\mu_2(\theta) ,$$

wobei μ_1 und μ_2 zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $[0, 2\pi]$ sind. Da die Funktion $\ln(1 - z)$ konvex ist, ist also die Konvexkombination

$$\frac{1}{3} \ln(1 - e^{i\theta} z) + \frac{2}{3} \ln(1 - e^{it} z) \prec \ln(1 - z) ,$$

und folglich durch Exponentiation

$$\left(\frac{1}{(1 - e^{i\theta} z)(1 - e^{it} z)^2} \right)^{1/3} \prec \frac{1}{1 - z} .$$

Wir wenden nun erneut Hilfssatz 50 an, diesmal mit $c = 0$ und $\alpha = 3$. Dies liefert ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß μ_3 mit

$$\frac{1}{(1 - e^{i\theta} z)(1 - e^{it} z)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 - e^{i\phi} z)^3} d\mu_3(\phi) . \quad (29)$$

Betrachtet man nun das Produkt der Kernfunktionen der Darstellungen für $h'(z)$ und $p(z)$

$$\frac{1}{(1 - e^{it}z)^2} \cdot \frac{1 + c e^{i\theta}z}{1 - e^{i\theta}z}$$

und setzt hierin den Nenner gemäß (29) ein, so liefert dies mit Standardargumenten aus der Maßtheorie die Darstellung

$$f'(z) = \int_{[0, 2\pi]^2} \frac{1 - e^{i\varphi}z}{(1 - e^{i\theta}z)^3} d\mu(\varphi, \theta)$$

mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $[0, 2\pi]^2$, s. [18], S. 19. Hieraus folgt die Behauptung durch Integration.

„ $\supset$ “: Den Beweis dieser – eher unwichtigen Aussage – lassen wir weg. □

Beispiel 51 (Extrempunkte von C) Die Extrempunkte der nahezu-konvexen Funktionen sind Schlitzabbildungen, deren geradlinigen Schlitz nicht notwendig radial sind, s. Abbildung 12. Alle derartigen Abbildungen haben diese Form (Übungsaufgabe).

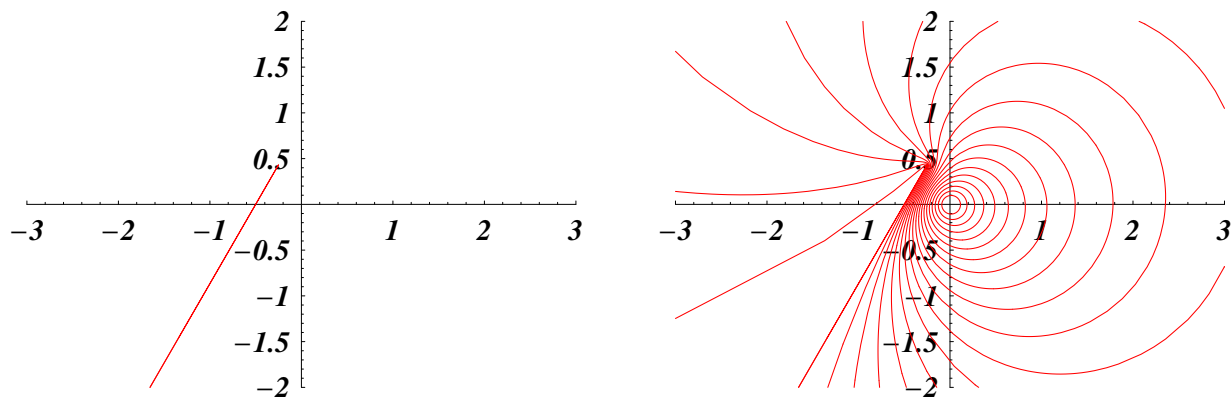


Abbildung 12: Bilder konzentrischer Kreislinsen bei einer Abbildung mit geradlinigem Schlitz

6.4 Schlichte Funktionen mit reellen Koeffizienten

In diesem Abschnitt behandeln wir schlichte Funktionen mit reellen Koeffizienten. Da bei diesen Funktionen mit $w = f(z) = \sum a_n z^n \in f(\mathbb{D})$ auch $\bar{w} = \overline{\sum a_n z^n} = \sum \overline{a_n} \bar{z}^n = \sum a_n \bar{z}^n = f(\bar{z}) \in f(\mathbb{D})$ ist, ist also das Bildgebiet $f(\mathbb{D})$ dieser Funktionen symmetrisch zur reellen Achse. Aus dem *Schwarzschen Spiegelungsprinzip* [2], welches wir im nächsten Abschnitt genauer betrachten werden, folgt, dass hiervon auch die Umkehrung gilt. Wir führen folgende Bezeichnungen ein.

Definition 52 (Symmetrische und typisch-reelle Funktionen) Mit

$$S_R := \{f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \in S \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

bezeichnen wir die Menge der symmetrischen schlichten Funktionen. Ferner sei

$$T := \{f \in N \mid \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} f(z) \geq 0\}$$

die Menge der typisch-reellen Funktionen.

Man sieht unmittelbar ein, dass Funktionen in T reelle Koeffizienten haben, da

$$\operatorname{Im} z \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f(z) \geq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} z \leq 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f(z) \leq 0$$

und folglich

$$\operatorname{Im} z = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f(z) = 0.$$

Also ist $S_R \subset T$. Man beachte aber, dass $T \not\subset S$ ist, denn $z + z^3 \in T \setminus S$ (Übungsaufgabe).

Es stellt sich heraus, dass viele Eigenschaften symmetrischer schlichter Funktionen auch für Funktionen aus T gelten. Anders als für S_R gibt es für T aber eine einfache analytische Beschreibung.

Satz 53 (Typisch-reelle Funktionen) Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(a) $f \in T$;

(b) $(1 - z^2) \frac{f(z)}{z} \in P$ und $a_n(f) \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

(c) $f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{z}{(1 - e^{it}z)(1 - e^{-it}z)} d\mu(t)$ mit einer wachsenden Funktion μ , $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$.

Beweis: „(a) $\Rightarrow$ (b)“: Sei $f \in T$. Dann ist also für $z = e^{i\theta}$ und $r \in (0, 1)$

$$\operatorname{Re} \frac{(1 - z^2) r f(rz)}{z} = -\operatorname{Re} ir \sin \theta \left(\operatorname{Re} f(re^{i\theta}) + i \operatorname{Im} f(re^{i\theta}) \right) = 2 \operatorname{Im}(rz) \cdot \operatorname{Im} f(rz) \geq 0.$$

Lassen wir nun $r \rightarrow 1$ streben, folgt zunächst $\operatorname{Re} (1 - z^2) \frac{f(z)}{z} \geq 0$ für $|z| = 1$. Das Minimumprinzip und $(1 - z^2) \frac{f(z)}{z} \Big|_{z=0} = 1$ liefern die Behauptung.

„(b) $\rightarrow$ (c)“: Sei $p(z) = (1 - z^2) \frac{f(z)}{z}$, dann hat p mit f reelle Koeffizienten. Es ist also $p(z) = \frac{1}{2}(p(z) + \overline{p(\bar{z})})$, was mit der Formel von Riesz-Herglotz die *Riesz-Herglotz-Formel mit reellen Koeffizienten* liefert:

$$p(z) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{it}z}{1 - e^{it}z} d\mu(t) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{-it}z}{1 - e^{-it}z} d\mu(t) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - z^2}{(1 - e^{it}z)(1 - e^{-it}z)} d\mu(t).$$

Aus

$$f(z) = \frac{z}{1 - z^2} p(z)$$

folgt schließlich die angegebene Formel.

„(c) $\rightarrow$ (a)“: Offenbar ist $f \in N$. Da der Imaginärteil der Kernfunktionen

$$\operatorname{Im} \frac{z}{(1 - e^{it}z)(1 - e^{-it}z)} = \operatorname{Im} \frac{z(1 - e^{it}\bar{z})(1 - e^{-it}\bar{z})}{(1 - e^{it}z)(1 - e^{-it}z)(1 - e^{it}\bar{z})(1 - e^{-it}\bar{z})} = \frac{1 - |z|^2}{|1 - 2 \cos t z + z^2|^2} \cdot \operatorname{Im} z$$

dasselbe Vorzeichen hat wie $\operatorname{Im} z$, folgt die Behauptung, denn T ist konvex und abgeschlossen. $\square$

Eine erste Folge von Satz 53 ist wieder die Koeffizientenabschätzung.

Satz 54 (Koeffizienten symmetrischer schlichter Funktionen, Dieudonné, Rogosinski, 1931)

Sei $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \in S_R$ bzw. $f \in T$. Dann gilt $|a_n| \leq n$ mit Gleichheit genau für die Koebfunktion und ihre symmetrische Drehung $-K(-z)$.

Beweis: Die Funktion

$$\frac{1-z^2}{z} f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+2} - a_n) z^{n+1}$$

ist ein Element von P . Daher folgt aus der Standardabschätzung für Funktionen mit positivem Realteil

$$|a_{n+2} - a_n| \leq 2.$$

Hieraus folgt $|a_n| \leq n$ mittels $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ wieder durch Induktion. Der Fall der Gleichheit kann in der üblichen Weise abgeleitet werden. $\square$

Beispiel 55 Wir zeigen, dass die Funktionen $f(z) = \frac{z}{(1-e^{it}z)(1-e^{-it}z)} \in S_R$ liegen und betrachten ihre Bildgebiete. Den Beweis der Schlichtheit lassen wir als Übungsaufgabe. Es ist für $z = e^{i\theta}$

$$f(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}}{(1 - e^{it}e^{i\theta})(1 - e^{-it}e^{i\theta})} = \frac{1}{2(\cos \theta - \cos t)} \in \mathbb{R}.$$

Also wird die Einheitskreislinie auf einen Teil der reellen Achse abgebildet werden. Folglich hat das Bildgebiet (wegen des einfachen Zusammenhangs) höchstens zwei Schlitz auf der reellen Achse, s. Abbildung 13.

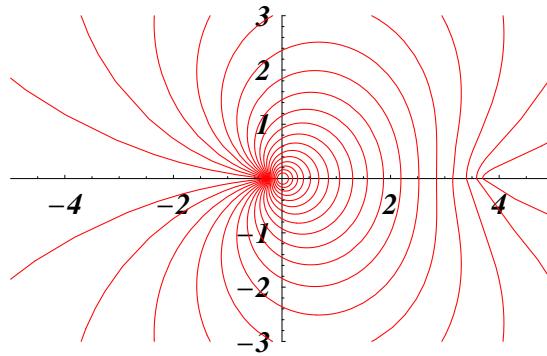


Abbildung 13: Bilder konzentrischer Kreislinien bei einer Abbildung mit zwei reellen Schlitten

Als weitere direkte Folge von von Satz 53 können wir die abgeschlossene konvexe Hülle von S_R und ihre Extrempunkte angeben.

Satz 56 (Extrempunkte von S_R) Für die abgeschlossene konvexe Hülle von S_R und ihre Extrempunkte gilt

$$(a) \quad \overline{\text{co}} S_R = T;$$

$$(b) \quad \text{E } \overline{\text{co}} S_R = \left\{ \frac{z}{(1 - e^{it}z)(1 - e^{-it}z)} \mid t \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Beweis: Aus $S_R \subset T$ folgt $\overline{\text{co}} S_R \subset T$. Da die Extrempunkte von T gemäß Satz 53 genau die Funktionen $\frac{z}{(1-e^{it}z)(1-e^{-it}z)} \in S_R$ sind, folgt aus dem Satz von Krein-Milman $T = \overline{\text{co}} \text{E } T \subset \overline{\text{co}} S_R$. Daher ist insgesamt $\overline{\text{co}} S_R = T$. $\square$

Beispiel 57 (Verzerrungssätze für Ableitungen in C und T) In Analogie zu Beispiel 42 erhalten wir für alle $f \in C$ und $f \in T$, insbesondere also auch für $f \in S_R$, wieder die Verzerrungssätze

$$|f^{(n)}(re^{i\theta})| \leq |K^{(n)}(re^{i\theta})| \leq K^{(n)}(r) = n! \frac{n+r}{(1-r)^{n+2}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

6.5 Die Schwarz-Christoffel-Formel

In diesem Abschnitt betrachten wir schlichte Funktionen, deren Bildgebiete durch Polygone berandet sind.¹² Hierfür benötigen wir das *Schwarzsche Spiegelungsprinzip* in folgender Form.

Satz 58 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip)

- (a) Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, welches in der oberen Halbebene liegt und sei $I \subset \partial D$ ein Intervall auf der reellen Achse. Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ sei analytisch in D , stetig in $D \cup I$ und habe in I reelle Werte. Dann kann man f in eindeutiger Weise analytisch fortsetzen auf das Gebiet $\overline{D}$, welches durch Spiegelung von D ($z \mapsto \bar{z}$) an der reellen Achse entsteht. Die Funktion f ist dann in $D \cup I \cup \overline{D}$ analytisch.
- (b) Analoges gilt, falls $D \subset \mathbb{D}$ ist, $I \subset \partial \mathbb{D}$ ein Kreisbogen der Einheitskreislinie ist und falls I auf eine beliebige Strecke $\gamma \subset \mathbb{C}$ abgebildet wird. In diesem Fall wird der Urbildbereich mittels $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ am Einheitskreis gespiegelt, während der Bildbereich eine Spiegelung an γ liefert.

Beweis: (a): Die behauptete analytische Fortsetzung wird durch die Festsetzung $g : \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}$

$$g(z) := \overline{f(\bar{z})}$$

erklärt. Dies bedeutet, dass die Funktion g an einem Spiegelpunkt $\bar{z}$ den gespiegelten Wert $\bar{f}$ hat. Zunächst stellen wir fest, dass die Funktionswerte der Funktion g auf der reellen Achse, also in I , mit denen der Funktion f übereinstimmen. Ferner ist g im Spiegelgebiet $\overline{D}$ von D analytisch, wie man durch Überprüfung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sieht (Übungsaufgabe). Also ist g eine analytische Fortsetzung von f . Man sieht schließlich ein, dass f auch im Intervall I analytisch sein muss, da dort nur hebbare Singularitäten möglich sind.

(b): Wir erinnern daran, dass Möbiustransformationen Kreislinien und Geraden auf ebensolche abbilden. Daher ergibt sich der betrachtete Fall durch die Anwendung zweier Möbiustransformationen, welche zum einen den Urbildbereich von der reellen Achse auf den Einheitskreisbogen und zum anderen den Bildbereich auf die Strecke γ abbilden. $\square$

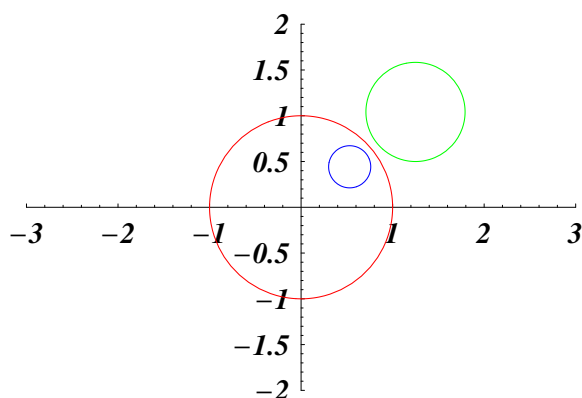


Abbildung 14: Spiegelung einer Kreislinie am Einheitskreis

¹²Im Grunde ist die Schlichtheit nicht unbedingt erforderlich. Die Bildgebiete müssen dann allerdings wieder auf geeigneten Riemannschen Flächen betrachtet werden. Dann hat die Schwarz-Christoffel-Formel auch in diesem Fall eine Bedeutung.

Die Inversion am Kreis $z \mapsto w := \frac{1}{\bar{z}}$ ist eine wichtige Konstruktion der geometrischen Funktionentheorie und kann auch geometrisch mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden (Übungsaufgabe). Sie lässt das Argument eines Punktes invariant, und für den Betrag des Bildpunktes gilt $|w| = \frac{1}{|z|}$, s. Abbildung 14. Spiegelt man die gesamte Kreisscheibe $\mathbb{D}$ am Einheitskreis, erhalten wir daher Δ .

Sei nun D ein *beschränktes Polygon* mit den *Innenwinkeln* $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$.

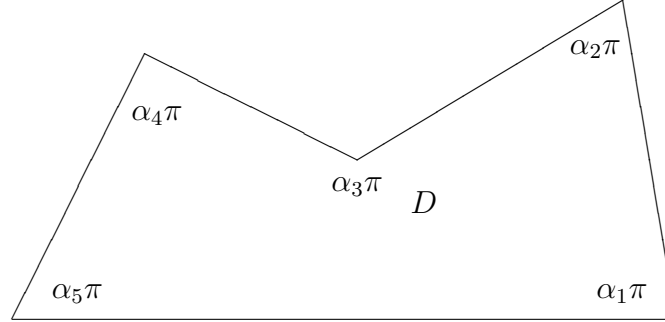


Abbildung 15: Ein Polygonebiet

Mit $\mu_k\pi$ bezeichnen wir die halben *Außenwinkel* oder *Ergänzungswinkel* des Polygons, so dass also für $k = 1, \dots, n$ die Beziehung $\alpha_k + 2\mu_k = 1$ gilt. Ein Wert $\mu_k > 0$ korrespondiert zu einer konvexen Ecke, während $\mu_k < 0$ eine konkave Ecke kennzeichnet. Da die Summe der Außenwinkel eines geschlossenen Polygons 2π beträgt, erhalten wir die Beziehung

$$\sum_{k=1}^n \mu_k = 1. \quad (30)$$

Dies ist gleichwertig zu der Aussage, dass das Tangentenargument bei einem Umlauf um 2π zunimmt.¹³

Sei nun $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ eine schlichte Funktion, welche die Einheitskreisscheibe auf D derart abbildet, dass die Ecken $\{w_1, \dots, w_n\}$ den Urbildern $\{z_1, \dots, z_n\}$ auf der Einheitskreislinie entsprechen. Diese nennen wir auch *Urecken* (prevertices), und sie seien auf $\partial\mathbb{D}$ gemäß ihrer Numerierung mit wachsendem Argument angeordnet

$$\arg z_1 < \arg z_2 < \dots < \arg z_n < \arg z_{n+1} \quad (z_{n+1} = z_1).$$

Die zugehörigen Außenwinkel an den Ecken $\{w_1, \dots, w_n\}$ seien $\{2\mu_1\pi, \dots, 2\mu_n\pi\}$. Dass die Abbildung f auf $\partial\mathbb{D}$ stetig fortsetzbar ist, folgt aus dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip.

Aus dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip folgt sogar, dass f entlang jedes der Kreissegmente (z_k, z_{k+1}) der Einheitskreislinie analytisch fortgesetzt werden kann, wobei z_k und z_{k+1} zwei aufeinanderfolgende Urecken seien. Weil f' keine Nullstellen hat, hat auch die Funktion f''/f' eine analytische Fortsetzung. Da bei der Spiegelung $0 \mapsto \infty$ abgebildet wird, ist f''/f' sogar im Unendlichen analytisch. Man beachte, dass bei jeder dieser Fortsetzungen das Bildpolygon an der entsprechenden Seite gespiegelt wird. Durch erneute Spiegelung entlang einer anderen Seite erhält man eine Abbildung $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, deren Bildgebiet dem von f ähnlich ist, so dass also die Beziehung $F = a f + b$ gilt. Daher ist auch

$$\frac{F''}{F'} = \frac{f''}{f'}.$$

¹³Diese Beziehung ist auch gleichwertig zur Aussage über die Winkelsumme in dem polygonalen n -Eck.

Hieraus folgt, dass die Funktion f''/f' in der erweiterten komplexen Ebene $\hat{\mathbb{C}}$ außer an den Ureken eine *eindeutige analytische Funktion* ist. Da sie auch in ∞ analytisch ist, ist sie ferner in $\mathbb{C}$ beschränkt.

Nun wollen wir f an den Ureken genauer untersuchen. In einer Umgebung jeder dieser Stellen z_k bildet die Funktion $h(z) = (f(z) - f(z_k))^{1/\alpha_k}$ ein Segment der Tangente an die Einheitskreislinie in ein geradliniges Segment ab. Daher gilt in einer Umgebung der Stelle z_k auch $f(z) = f(z_k) + (z - z_k)^{\alpha_k} g(z)$, wobei g eine analytische Funktion mit $g(z_k) \neq 0$ ist. Daher ist weiter $f'(z) = (z - z_k)^{-2\mu_k} p(z)$ und schließlich $\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{-2\mu_k}{z - z_k} + \frac{p'(z)}{p(z)}$, wobei p eine analytische Funktion mit $p(z_k) \neq 0$ ist. Folglich ist die Funktion

$$H(z) := \frac{f''(z)}{f'(z)} + \sum_{k=1}^n \frac{2\mu_k}{z - z_k}$$

an allen Punkten z_k analytisch, und da $\frac{f''(z)}{f'(z)}$ überall sonst in $\mathbb{C}$ analytisch ist, ist $H(z)$ analytisch in ganz $\mathbb{C}$ und beschränkt.

Der Satz von Liouville reduziert H zu einer Konstanten, welche wir nun bestimmen wollen. Eine Laurententwicklung von f im Unendlichen liefert

$$f(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots,$$

so dass

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{2}{z} + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

und folglich $f''/f'(\infty) = 0$. Dies liefert schließlich $H(z) \equiv 0$ und damit die *Schwarz-Christoffel-Formel*

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\sum_{k=1}^n \frac{2\mu_k}{z - z_k}.$$

Dies kann integriert werden und ergibt zunächst

$$\ln f'(z) = -\sum_{k=1}^n 2\mu_k \ln(z - z_k) + \ln B$$

oder

$$f'(z) = B \prod_{k=1}^n (z - z_k)^{-2\mu_k}. \quad (31)$$

Eine weitere Integration liefert schließlich die Formel

$$f(z) = A + B \int \frac{dz}{(z - z_1)^{2\mu_1} \dots (z - z_n)^{2\mu_n}}. \quad (32)$$

Auch diese Formel ist eine Variante der Schwarz-Christoffel-Formel.

Wir fassen die gewonnenen Erkenntnisse in folgendem Satz zusammen.

Satz 59 (Schwarz-Christoffel-Formel) *Eine schlichte Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, deren Bildgebiet D ein Polygon mit den Ecken w_k ($k = 1, \dots, n$), den halben Außenwinkeln $\mu_k\pi$ ($k = 1, \dots, n$) und den Ureken $z_k = f^{-1}(w_k) \in \partial\mathbb{D}$ ($k = 1, \dots, n$) ist, erfüllt die Schwarz-Christoffel-Formel*

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\sum_{k=1}^n \frac{2\mu_k}{z - z_k}, \quad (33)$$

welche nach Integration die Form (32) erhält.

Beispiel 60 (Unbeschränkte Polygone) Die Schwarz-Christoffel-Formel bleibt gültig, wenn das Polygon D unbeschränkt ist, sofern wir die Innenwinkel an den Ecken im Unendlichen negativ messen.¹⁴ In diesem Fall bleibt auch Gleichung (30) gültig. Es gilt: Die Ecke w_k ist beschränkt genau dann, wenn $\mu_k < \frac{1}{2}$ ist. Außerdem gilt: Ist f schlicht, so sind alle $\mu_k > -\frac{1}{2}$ (Übungsaufgabe).

Ist insbesondere D an einer „Ecke“ im Unendlichen glatt, dann müssen wir den dortigen Innenwinkel $\alpha_k\pi = \pi$ negativ zählen, was zu dem Außenwinkel $2\mu_k\pi = (1 + \alpha_k)\pi = 2\pi$, also zu $\mu_k = 1$ anstatt zu $\mu_k = 0$ führt.

In diesem Sinne ist eine Halbebene ein Polygon mit genau einer Ecke in ∞ . Nehmen wir nun an, die zugehörige Urecke liege im Punkt 1, dann liefert die Schwarz-Christoffel-Formel für diesen Fall

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{2}{z-1},$$

bzw. nach Integration

$$f(z) = A + \frac{B}{1-z}.$$

Natürlich ist das Resultat eine Möbiustransformation, denn genau diese bilden ja Kreislinien und Geraden auf ebensolche ab.

Leider ist die Schwarz-Christoffel-Formel eine Funktional-Differentialgleichung, da die Urecken $z_k = f^{-1}(w_k)$ von f abhängen und im allgemeinen unbekannt sind:

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\sum_{k=1}^n \frac{2\mu_k}{z - f^{-1}(w_k)}.$$

Es gibt numerische Verfahren, um diese zu bestimmen. In manchen symmetrischen Fällen können die Urbilder sogar exakt angegeben werden. In diesen Fällen lassen sich die Abbildungsfunktionen vollständig bestimmen (Übungsaufgabe).

Beispiel 61 (Konvexe Polygone) Für konvexe Polygone erhalten wir aus der Schwarz-Christoffel-Formel die Darstellung

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \sum_{k=1}^n \mu_k \frac{1 + \overline{z_k}z}{1 - \overline{z_k}z},$$

wobei alle $\mu_k > 0$ sind, $\sum_{k=1}^n \mu_k = 1$ ist und die Punkte

$$z_k = f^{-1}(w_k) \in \partial\mathbb{D}$$

die Urbilder der Ecken sind. Dies ist ganz offenbar dieselbe Darstellung, die wir aus der Riesz-Herglotz-Darstellung via $1 + z \frac{f''}{f'} \in P$ gewinnen:

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{it}z}{1 - e^{it}z} d\mu(t), \quad (34)$$

wobei die zugehörige wachsende Funktion $\mu(t)$ im polygonalen Fall nur an endlich vielen Stellen einen Sprung hat, welcher (dividiert durch 2π) den Winkeln an den Ecken entspricht.

Dieser Zusammenhang liefert uns nun also eine konkrete Vorstellung davon, was die Riesz-Herglotz-Darstellung konvexer Funktionen (34) besagt: Das zu f gehörige Maß $\mu(t)$ misst beim Durchlauf auf $\partial\mathbb{D}$ das Wachstum der Tangentenrichtung. Ein absolut stetiges Maß $\mu(t)$ entspricht dann einer konvexen Randkurve, welche keine geradlinigen Anteile und keine Ecken besitzt.

¹⁴Man mache sich klar, warum!

Man sollte sich nun einmal vorstellen, wie das entsprechende konvexe Gebiet aussehen mag, das zur Cantorfunktion $\mu(t)$ gehört: Dieses Gebiet muss die Eigenschaft haben, dass die Tangentenrichtung fast überall konstant ist, d. h., es muss unendlich viele geradlinigen Teilstücke der Randkurve geben derart, dass bei einem Gesamtumlauf die Tangentenrichtung dennoch (auf einer Menge vom Lebesguemaß 0) um 2π wächst. Wer kann dieses Gebiet zeichnen?

Der Satz von Riesz-Herglotz in der Form von Satz 21 sagt uns übrigens auch: Die konvexen Polygonabbildungen liegen dicht in K , m. a. W.: Jede konvexe Funktion $f \in K$ lässt sich lokal gleichmäßig durch Polygonabbildungen approximieren.

Den sternförmigen und nahezu-konvexen Fall sehen wir uns etwas genauer an. Hierzu werden wir einige Hilfssätze bereitstellen.

Eine kompakte Familie, welche P sehr ähnlich ist und die nun benötigt wird, ist die Familie $\tilde{P}$ der Funktionen p , welche durch $p(0) = 1$ normiert sind und für welche ein $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert derart, dass $\operatorname{Re}(e^{-i\alpha}p) > 0$ ist. Offenbar ist $p \in \tilde{P}$ genau dann, wenn $p \prec \frac{1+cz}{1+z}$ für ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ ist. Es zeigt sich, dass dann $c = e^{-2i\alpha}$ ist.

Hilfssatz 50 zeigt nun, dass jede Funktion $p \in \tilde{P}$ (lokal gleichmäßig) approximiert werden kann durch Funktionen der Form

$$p_n(z) := \sum_{k=1}^n \mu_k \frac{1 + cx_k z}{1 - x_k z}, \quad |c| = |x_k| = 1, \quad \mu_k > 0 \quad (k = 1, \dots, n), \quad (35)$$

wobei $\sum_{k=1}^n \mu_k = 1$ ist. Es gilt also der

Hilfssatz 62 (Dichte Teilmenge in $\tilde{P}$) Die Funktionen der Form (35) bilden eine dichte Teilmenge von $\tilde{P}$.

Die additive Darstellung dieser Funktionen hilft uns in unseren Betrachtungen oft nicht weiter, weshalb wir zu einer multiplikativen Darstellung übergehen wollen.

Hilfssatz 63 (Multiplikative Darstellung) Jede Funktion der Form (35) hat eine Darstellung

$$p_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{1 - y_k z}{1 - x_k z}, \quad (36)$$

wobei

$$|y_k| = |x_k| = 1 \quad (37)$$

ist und diese Zahlen sich auf der Einheitskreislinie immer abwechseln:

$$\arg x_1 < \arg y_1 < \arg x_2 < \arg y_2 < \dots < \arg x_n < \arg y_n < \arg x_1 + 2\pi. \quad (38)$$

Beweis: Übungsaufgabe, s. [10]. □

Auf der anderen Seite stellt sich heraus, dass Funktionen der Form (36)-(38) tatsächlich alle in $\tilde{P}$ liegen, was zumindest nicht direkt offensichtlich ist. Dies führt zu dem dritten

Hilfssatz 64 (Multiplikative dichte Teilmenge in $\tilde{P}$) Die Funktionen der Form (36)-(38) bilden eine dichte Teilmenge von $\tilde{P}$.

Beweis: Übungsaufgabe, s. [10]. □

Wir bemerken noch, dass die multiplikative Darstellung (36) die einfache logarithmische Ableitung

$$\frac{p'_n(z)}{p_n(z)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{z - \overline{y_k}} - \frac{1}{z - \overline{x_k}} \right) \quad (39)$$

besitzt.

Nun können wir uns wieder den speziellen Klassen schlichter Funktionen zuwenden.

Beispiel 65 (Sternförmige Funktionen) Für sternförmige Funktionen gilt bekanntlich $z \frac{f'}{f} \in P$. Satz 21 und Hilfssatz 64 zeigen, dass also $z \frac{f'}{f}$ approximiert werden kann durch Funktionen der Form

$$z \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} = p_n(z) = \sum_{k=1}^n \mu_k \frac{1 + x_k z}{1 - \overline{x_k} z} = \prod_{k=1}^n \frac{1 - y_k z}{1 - \overline{x_k} z}$$

mit den dort jeweils angegebenen Eigenschaften. Differenziert man die Gleichung

$$z f'_n(z) = p_n(z) f_n(z),$$

dann erhalten wir

$$f'_n(z) + z f''_n(z) = p'_n(z) f_n(z) + p_n(z) f'_n(z),$$

und eine Partialbruchzerlegung liefert schließlich

$$\frac{f''_n(z)}{f'_n(z)} = \frac{p_n(z) - 1}{z} + \frac{p'_n(z)}{p_n(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - \overline{y_k}} - \sum_{k=1}^n \frac{1 + 2\mu_k}{z - \overline{x_k}}.$$

Dies ist offensichtlich eine Polygonabbildung mit n endlichen Ecken des Winkels 2π (Haarnadel!) und abwechselnd hierzu n Ecken im Unendlichen. Das Bildgebiet ist in diesem Fall also die ganze Ebene mit n geradlinigen Schlitten. Jede sternförmige Funktion lässt sich folglich durch solche Schlitzabbildungen approximieren, wobei es sich in diesem Fall natürlich um ursprungs-konzentrische Schlitzte handeln muss.

Beispiel 66 (Nahezu-konvexe Funktionen) Eine Funktion $f(z)$ ist nahezu-konvex, wenn es eine konvexe Funktion $\varphi(z) \in K$ und eine Funktion $p(z) \in \tilde{P}$ gibt mit $f'(z) = \varphi'(z) p(z)$. Wir leiten logarithmisch ab und erhalten

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{p'(z)}{p(z)} + \frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}.$$

Somit bekommen wir mit (39) und (33) die Darstellung

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{z - \overline{y_k}} - \frac{1}{z - \overline{x_k}} \right) - \sum_{k=1}^m \frac{2\mu_k}{z - z_k},$$

wobei $|x_k| = |y_k| = |z_k| = 1$ ist und $\mu_k > 0$, $\sum_{k=1}^m \mu_k = 1$. Wählt man nun die konvexe Funktion $\varphi(z)$ derart, dass $m = n$ und $z_k = \overline{x_k}$ ($k = 1, \dots, n$) ist, dann ergibt sich die Schwarz-Christoffel-Abbildung

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{z - \overline{y_k}} - \frac{1 + 2\mu_k}{z - \overline{x_k}} \right),$$

deren Bildgebiet ein Polygon mit n endlichen Ecken des Winkels 2π (Haarnadel) und abwechselnd n Ecken im Unendlichen ist. Dies ist wie bei den sternförmigen Funktionen ein Gebiet mit n geradlinigen Schlitten, nur dass diesmal die Schlitzte nicht sternförmig zu sein brauchen. Jede nahezu-konvexe Funktion lässt sich (lokal gleichmäßig) durch derartige Polygonabbildungen approximieren.

7 Löwnertheorie

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns wieder mit der ganzen Klasse S der schlichten Funktionen. Wir werden versuchen, eine Differentialgleichung herzuleiten, welche die Dynamik der Ausbreitung einfach-zusammenhängender Gebiete erfasst, die 1923 von Löwner entdeckt wurde.

Hierfür benötigen wir zunächst einen Einblick darin, wie die lokal gleichmäßige Konvergenz einer schlichten Funktionenfolge sich in der Geometrie ihrer Bildgebiete äußert. Dieser geometrische Konvergenzbegriff wird die Carathéodorysche Kern-Konvergenz genannt.

Sei also $D_1, D_2, \dots$ eine Folge einfach-zusammenhängender Gebiete $D_n \subset \mathbb{C}$, $D_n \neq \mathbb{C}$, welche alle den Ursprung enthalten mögen.¹⁵ Die schlichte Funktion $f_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ sei die zugehörige eindeutig bestimmte Abbildungsfunktion mit $f_n(0) = 0$ und $f'_n(0) > 0$, welche das Bildgebiet $f_n(\mathbb{D}) = D_n$ habe.

Um den *Kern* der Gebietsfolge (D_n) zu erklären, machen wir eine Fallunterscheidung. Falls der Durchschnitt aller Gebiete $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ keine Kreisscheibe um den Ursprung enthält, setzen wir

$$\text{Kern}(D_n) = \{0\}.$$

Andernfalls enthält der Durchschnitt also eine Kreisscheibe mit Zentrum in 0. In diesem Fall erklären wir den $\text{Kern}(D_n)$ als das größte Gebiet $D \subset \mathbb{C}$, welches den Ursprung enthält und die Eigenschaft hat, dass jede kompakte Teilmenge von D in fast allen Gebieten D_n enthalten ist. Der Kern einer Folge einfach-zusammenhängender Gebiete ist wieder ein einfach-zusammenhängendes Gebiet.

Ist die Gebietsfolge wachsend $D_1 \subset D_2 \subset \dots$, dann ist ihr Kern die Vereinigung

$$\text{Kern}(D_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

Ähnliches gilt allerdings beispielsweise nicht, wenn die Gebietsfolge fallend ist $D_1 \supset D_2 \supset \dots$. Als Beispiel sei D_n die gesamte Ebene, welche entlang der Strecke $[1, \infty]$ aufgeschlitzt sei, wobei der Schlitz auch noch das Kreissegment $[1, e^{(2-\frac{1}{n})i\pi}]$ auf der Einheitskreislinie enthalte, s. Abbildung 16.

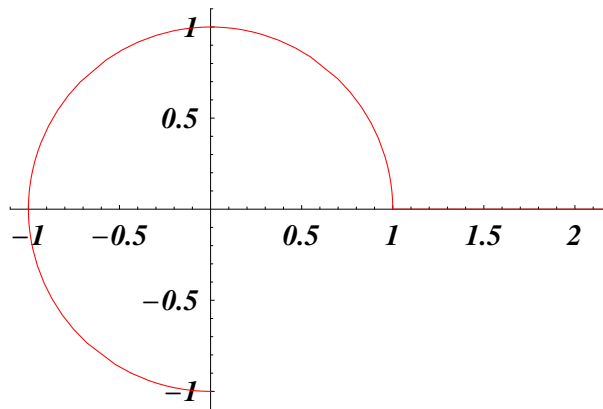


Abbildung 16: Carathéodorysche Kern-Konvergenz

In diesem Fall ist $\text{Kern}(D_n) = \mathbb{D}$. Der Zusammenhang mit der zugehörigen Funktionenfolge f_n ist wie folgt.

¹⁵Wichtig ist, dass alle Gebiete einen gemeinsamen Punkt haben.

Satz 67 (Carathéodorisches Kern-Konvergenz) Sei (D_n) eine Folge einfach zusammenhängender Gebiete $D_n \subset \mathbb{C}$, $D_n \neq \mathbb{C}$ mit $0 \in D_n$, und sei $f_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ die zugehörige Riemannsche Abbildungsfunktion mit $f_n(\mathbb{D}) = D_n$, $f_n(0) = 0$ und $f'_n(0) > 0$. Ferner sei $D = \text{Kern}(D_n)$. Dann konvergiert $f_n \rightarrow f$ lokal gleichmäßig genau dann, wenn $D_n \rightarrow D \neq \mathbb{C}$. Falls Konvergenz vorliegt, gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder $D = \{0\}$, dann ist f die Nullfunktion, die Grenzfunktion von f_n ist also konstant. Andernfalls ist $D \neq \{0\}$, dann ist D ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f(\mathbb{D}) = D$.

Beweis: Der längliche Beweis wird weggelassen, kann aber in [5], S. 78–80, nachgelesen werden. $\square$

Löwners wesentliche Idee besteht nun in der Erkenntnis, dass jede schlichte Funktion lokal gleichmäßig durch Funktionen approximiert werden kann, deren Bildgebiet ein Schlitzgebiet ist. Hierbei ist ein Schlitzgebiet $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, welches ganz $\mathbb{C}$ ist bis auf einen Jordanbogen¹⁶ Γ , $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$, der – aufgrund des einfachen Zusammenhangs von D – sich nach ∞ erstreckt. Typische Schlitzgebiete sind die geradlinig geschlitzten Gebiete, die wir als Extrempunkte der nahezu-konvexen Funktionen kennengelernt haben. Aber natürlich ist der Schlitz im allgemeinen nicht geradlinig, sondern kann als beliebige stetige Kurve viel komplizierter sein. Wir nennen derartige schlichte Funktionen *Schlitzabbildungen*. Der folgende Satz zeigt die Bedeutung derartiger Funktionen.

Satz 68 (Dichtheit von Schlitzabbildungen) Die Menge der Schlitzabbildungen in S liegt dicht in S . Das heißt: Zu jeder Funktion $f \in S$ gibt es eine Folge von Schlitzabbildungen $f_n \in S$ derart, dass f_n lokal gleichmäßig gegen f konvergiert.

Beweis: Sei $r \in (0, 1)$. Die Abbildung $f \mapsto g_r := \frac{f(rz)}{r}$ zeigt wegen $\lim_{r \rightarrow 1} g_r(z) = f(z)$, dass wir f lokal gleichmäßig durch Funktionen aus S approximieren können, die beschränkt sind und einen analytischen Rand besitzen.

Sei nun also f eine schlichte Funktion mit beschränktem Bildgebiet D , welches die analytische Randkurve γ besitze. Ferner sei Γ_n ein Jordanbogen, der das Unendliche mit einem Punkt $w_0 \in \gamma$ verbinde und dann einen Teil von γ bis w_n durchlaufe, s. Abbildung 17.

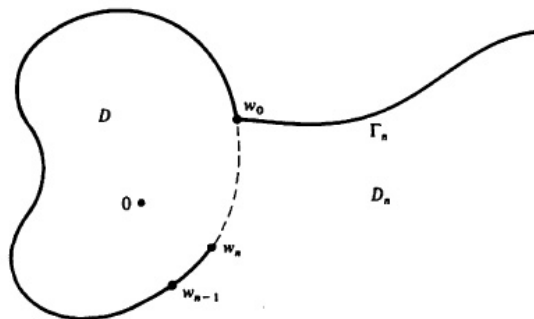


Abbildung 17: Approximation eines beschränkten Gebiets durch Schlitzfunktionen. Quelle: [5]

Sei D_n das Komplement von Γ_n und sei $g_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ die Riemannsche Abbildungsfunktion mit $g_n(\mathbb{D}) = D_n$, $g_n(0) = 0$ und $g'_n(0) > 0$. Die Endpunkte w_n seien hierbei so gewählt, dass $\Gamma_n \subset \Gamma_{n+1}$ und $w_n \rightarrow w_0$ gelte. Bei dieser Konstruktion ist offensichtlich D der Kern von D_n . Also strebt nach Satz 67 über die Carathéodorysche Kern-Konvergenz g_n lokal gleichmäßig gegen f . Insbesondere gilt $g'_n(0) \rightarrow f'(0) = 1$, so dass $f_n := \frac{g_n}{g'_n(0)} \in S$ die gesuchte Folge ist. $\square$

¹⁶Ein Jordanbogen ist eine stetige und doppelpunktfreie Kurve.

In der Folge werden wir die *Löwnersche Differentialgleichung* für Schlitzabbildungen herleiten. Wir werden hierzu die Konstruktion der *Schlitzverkürzung* benutzen. Sei hierzu $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Schlitzabbildung mit $f(\mathbb{D}) = D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$, wobei Γ ein Jordanbogen sei, der im Punkt $w_0 \in \mathbb{C}$ beginnt und nach Unendlich strebt. Die Abbildung $w = \psi(t)$ ($0 \leq t < T$) sei eine stetige Parameterdarstellung dieser Kurve mit $\psi(0) = w_0$. Selbstverständlich ist $\psi(s) \neq \psi(t)$ für $s \neq t$.

Nun verkürzen wir den Schlitz: Sei Γ_t derjenige Teil von Γ , welcher an der Stelle $\psi(t)$ startet, und sei D_t das Komplement von Γ_t . Dann ist $D_0 = D$, und es gilt $D_s \subset D_t$ für $s < t$. Sei schließlich

$$g(z, t) = \beta(t) \left(z + b_2(t) z^2 + b_3(t) z^3 + \dots \right)$$

die Riemannsche Abbildungsfunktion von $\mathbb{D}$ nach D_t mit $g(0, t) = 0$ und $g'(0, t) = \beta(t) > 0$. Offenbar ist $g(z, 0) = f(z)$. Aus der Carathéodoryschen Kern-Konvergenz und der Cauchy-Formel folgt, dass die Taylorkoeffizienten von $g(z, t)$ allesamt stetig differenzierbare Funktionen von t sind. Insbesondere ist $\beta(t)$ stetig. Weiter ist $\beta(0) = 1$. Aus dem Subordinationsprinzip folgt wegen $D_s \subset D_t$ bzw. $g(z, s) \prec g(z, t)$ für $s < t$, dass $\beta(t)$ eine streng wachsende Funktion ist, denn $f \prec g$ und $f(\mathbb{D}) \neq g(\mathbb{D})$ impliziert ja insbesondere $|a_1(f)| < |a_1(g)|$. Wir können daher eine Umparametrisierung vornehmen und o. B. d. A. $\beta(t) = e^t$ ($0 \leq t < T$) setzen. Bei dieser Wahl ist aber $T = \infty$. Um dies zu zeigen, sei $M > 0$ beliebig. Dann liegt offenbar Γ_t außerhalb des Kreises $\mathbb{D}_M$ für alle genügend großen t . Aus dem Maximumprinzip folgt dann, dass

$$\left| \frac{z}{g(z, t)} \right| \leq \frac{1}{M} \quad (z \in \mathbb{D})$$

für diese t -Werte. Hieraus folgt, dass $M \leq |g'(0, t)| = e^t$ für t nahe genug bei T . Da M beliebig war, folgt also, dass $e^t \rightarrow \infty$ strebt für $t \rightarrow T$. Dies geht nur für $T = \infty$.

Fassen wir zusammen, so haben wir also die *Standarddarstellung*

$$g(z, t) = e^t \left(z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n(t) z^n \right) \quad (0 \leq t < \infty) \quad (40)$$

für Γ bzw. für die zu den durch Schlitzverkürzung entstehenden Bildgebieten D_t gehörige Funktionenfamilie. Wir nennen (40) eine *Löwnerkette*. Ihre Koeffizienten $b_n(t)$ sind stetig differenzierbare Funktionen.

Wir betrachten nun folgende Komposition: Sei

$$f(z, t) = g^{-1}(f(z), t) = e^{-t} \left(z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t) z^n \right) \quad (0 \leq t < \infty). \quad (41)$$

Die Funktion $f(z, t)$ bildet $\mathbb{D}$ auf ein Schlitzgebiet in $\mathbb{D}$ ab, dessen Schlitz mit wachsendem t immer länger wird. Offenbar ist $f(z, 0) = z$, und die Funktionen $a_n(t)$ sind ebenfalls stetig differenzierbar.

Wir werden sehen, dass für $t \rightarrow \infty$ lokal gleichmäßig

$$e^t f(z, t) \rightarrow f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

Insbesondere gilt also $\lim_{t \rightarrow \infty} a_n(t) = a_n$. Dies ist enthalten in folgendem Satz.

Satz 69 (Löwnersche Differentialgleichung I) Sei $f \in S$ eine Schlitzabbildung mit $f(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Die zugehörige beschränkte Löwnerkette $f(z, t)$ sei durch (41) erklärt. Dann erfüllt $f(z, t)$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f \frac{1 + \kappa(t) f}{1 - \kappa(t) f} \quad (f = f(z, t)), \quad (42)$$

wobei $\kappa(t)$ eine stetige komplexwertige Funktion mit $|\kappa(t)| = 1$ ($0 \leq t < \infty$) ist. Ferner gilt die Gleichung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^t f(z, t) = f(z) \quad (z \in \mathbb{D}) .$$

Beweis: Beweis s. [5], S. 83–87. □

Eine Deutung der Löwnerschen Differentialgleichung besagt, dass die Funktion $e^t f(z, t)$ einen Fluss von der identischen Abbildung z zu $f(z)$ darstellt, dessen Dynamik durch die Differentialgleichung beschrieben wird.

Wir wenden nun die Löwnersche Differentialgleichung an, um uns wieder der Bieberbachschen Vermutung zu widmen.

Beispiel 70 (Bieberbachsche Vermutung für $n = 3$) Wir wollen zeigen, dass für $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \in S$ die Beziehung $|a_3| \leq 3$ gilt. Die Löwner-Theorie reduziert dieses Problem auf Funktionen der Form

$$f(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t f(z, t) ,$$

wobei die Funktion $f(z, t)$ Lösung der Löwnerschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f \frac{1 + \kappa(t) f}{1 - \kappa(t) f} \quad \text{mit der Anfangsbedingung} \quad f(z, 0) = z$$

ist. Hierbei ist $\kappa(t)$ eine stetige Funktion vom Betrag 1. Sei also wieder

$$f(z, t) = e^{-t} \left(z + a_2(t) z^2 + a_3(t) z^3 + \dots \right)$$

die zu f gehörige Löwnerkette. Dann erhalten wir $a_n(0) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} a_n(t) = a_n(\infty) = a_n$. Führt man in der Löwnerschen Differentialgleichung (nach Erweitern mit dem Hauptnenner) einen Koeffizientenvergleich durch, erhält man für die ersten beiden nicht-trivialen Koeffizienten

$$a_2'(t) = -2e^{-t} \kappa(t) \tag{43}$$

$$a_3'(t) = -2e^{-2t} \kappa(t) \left(\kappa(t) + 2e^t a_2(t) \right) . \tag{44}$$

Integrieren wir zunächst – als Testfall – die Differentialgleichung (43), so erhalten wir

$$a_2 = a_2(\infty) - a_2(0) = \int_0^\infty a_2'(t) dt = -2 \int_0^\infty e^{-t} \kappa(t) dt .$$

Hieraus folgt mit $|\kappa(t)| = 1$ die Ungleichung

$$|a_2| \leq 2 \int_0^\infty e^{-t} dt = 2 .$$

Dies wussten wir zwar schon aus dem Flächensatz, wir haben dieses Resultat aber diesmal mit einer neuen Methode hergeleitet. Dass die Löwner-Methode wesentlich stärker ist, werden wir gleich sehen.

Wir wenden uns nun mit demselben Verfahren dem dritten Koeffizienten zu. Aus (44) folgt zusammen mit (43)

$$a_3'(t) = -2e^{-2t} \kappa(t)^2 + 2 a_2(t) a_2'(t) ,$$

so dass eine Integration die Beziehung

$$a_3 = -2 \int_0^\infty e^{-2t} \kappa(t)^2 dt + a_2^2 = -2 \int_0^\infty e^{-2t} \kappa(t)^2 dt + 4 \left(\int_0^\infty e^{-t} \kappa(t) dt \right)^2 \tag{45}$$

liefert. Schätzt man nun die Integrale in (45) einzeln ab, so wird die Abschätzung zu unscharf. Es geht aber auch besser, denn die beiden Integranden sind ja ganz offenbar miteinander verwandt. Dies wollen wir nun ausnutzen. Um eine „reelle“ Abschätzung durchführen zu können, führen wir (45) auf reelle Integrale zurück. Man beachte, dass wegen $f \in S \Rightarrow e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) \in S$ (Drehungs-invarianz von S) die Beziehung

$$\max_{f \in S} |a_3(f)| = \max_{f \in S} \operatorname{Re} a_3(f)$$

gilt und wir daher o. B. d. A. den Realteil abschätzen können. Wir setzen $\kappa(t) = e^{i\theta(t)}$ und erhalten aus (45) zunächst

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} a_3 &= 2 \int_0^\infty e^{-2t} (1 - 2 \cos^2 \theta(t)) dt + 4 \left(\int_0^\infty e^{-t} \cos \theta(t) dt \right)^2 - 4 \left(\int_0^\infty e^{-t} \sin \theta(t) dt \right)^2 \\ &\leq 1 - 4 \int_0^\infty e^{-2t} \cos^2 \theta(t) dt + 4 \left(\int_0^\infty e^{-t} \cos \theta(t) dt \right)^2. \end{aligned}$$

Schließlich wenden wir die kontinuierliche Form der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\left(\int_0^\infty f(t) g(t) dt \right)^2 \leq \int_0^\infty f(t)^2 dt \cdot \int_0^\infty g(t)^2 dt$$

an und erhalten (mit $f(t) = e^{-\frac{t}{2}}$ und $g(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cos \theta(t)$)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} a_3 &\leq 1 - 4 \int_0^\infty e^{-2t} \cos^2 \theta(t) dt + 4 \left(\int_0^\infty e^{-t} \cos \theta(t) dt \right)^2 \\ &\leq 1 - 4 \int_0^\infty e^{-2t} \cos^2 \theta(t) dt + 4 \left(\int_0^\infty e^{-t} dt \right) \cdot \left(\int_0^\infty e^{-t} \cos^2 \theta(t) dt \right) \\ &= 1 + 4 \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-2t}) \cos^2 \theta(t) dt \\ &\leq 1 + 4 \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-2t}) dt = 3. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Bieberbachsche Vermutung für $n = 3$. Dies wurde 1923 von Löwner bewiesen. Man kann auch zeigen – allerdings nicht mit dieser Methode¹⁷ –, dass Gleichheit nur für eine Drehung der Koebeffunktion möglich ist.

Während der Beweis der Bieberbachschen Vermutung mit der Löwner-Methode für $n = 2$ sehr einfach war, war er für $n = 3$ schon viel komplizierter. Für größere $n \in \mathbb{N}$ ist dies so aufwendig, dass erst 1973 Nehari ein Beweis der Bieberbachschen Vermutung mit dieser Methode für $n = 4$ gelang.

Mit dem eben bewiesenen Resultat liefert die Löwner-Theorie also einen ersten Anhaltspunkt, dass die Bieberbachsche Vermutung durchaus stimmen könnte. Im Gegenzug kann die Löwner-Methode allerdings auch dazu verwendet werden, die Bieberbachsche Vermutung in Zweifel zu ziehen.

Beispiel 71 (Littlewood-Paley-Vermutung 1932, Satz von Fekete-Szegő 1933) Ungerade schlichte Funktionen entstehen durch Anwendung der Quadratwurzeltransformation. Die Tatsache, dass die Koeffizienten der Quadratwurzeltransformierten der Koebeffunktion alle gleich 1 sind, leitete Littlewood und Paley zu folgendem

¹⁷Warum nicht?

Satz 72 (Littlewood-Paley 1932) Sei $g(z) = z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \dots \in S_U$ eine ungerade schlichte Funktion. Dann gibt es eine absolute Konstante A , so dass $|b_{2n-1}| < A$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Littlewood und Paley konnten $A < 14$ beweisen und schrieben in einer Fußnote „No doubt the true bound is given by $A = 1$.“ Sie nahmen also an, dass die Quadratwurzeltransformierte der Koebeffunktion hier jeweils die Extremalfunktion darstellt.

Diese Littlewood-Paley-Vermutung ist leider falsch.¹⁸ Fekete und Szegö (1933) zeigten mit Hilfe der Löwner-Theorie (s. [5], S. 104)

$$\max_{g \in S_U} |b_5| = \frac{1}{2} + e^{-2/3} = 1,013\dots > 1. \quad (46)$$

Dies gibt auch der Bieberbachschen Vermutung einen Dämpfer. Die Littlewood-Paley-Vermutung ist aber richtig für sternförmige Funktionen (Übungsaufgabe).

Fekete und Szegö bewiesen für $f \in S$ und $\lambda \in [0, 1]$ das scharfe Resultat (s. [5], Theorem 3.8)

$$\max_{f \in S} |a_3 - \lambda a_2^2| = 1 + 2e^{-\frac{2\lambda}{1-\lambda}},$$

welches nur für $\lambda = 0, 1$ „triviale“ Lösungen besitzt. Der elementare Fall $\lambda = 1$ folgt direkt aus dem Flächensatz und soll als Übungsaufgabe bearbeitet werden.

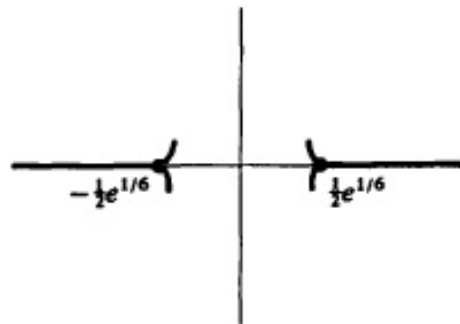


Abbildung 18: Das Bildgebiet der Littlewood-Paley-Extremalfunktion (46). Quelle: [5]

Die scharfe Abbildungsfunktion des Littlewood-Paley-Problems (46) aus Satz 72 kann wegen

$$\sqrt{f(z^2)} = z + \frac{a_2}{2} z^3 + \frac{a_3 - \frac{1}{4}a_2^2}{2} z^5 + \dots$$

aus dem Fekete-Szegö-Problem für $\lambda = \frac{1}{4}$ realisiert werden und ihr Bildgebiet hat die Gestalt von Abbildung 18.

Nachdem also klar war, dass die Littlewood-Paley-Vermutung falsch ist, hatte Robertson die folgende Idee.

Beispiel 73 (Robertsonsche Vermutung 1936) Sei $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \in S$. Robertson vermutete, dass ungerade schlichte Funktionen

$$g(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \dots \in S_U$$

¹⁸und zwar für alle $n \geq 3!$

die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^n |b_{2k-1}|^2 \leq n$$

erfüllen. Zwar sind die Koeffizienten $|b_{2k-1}|$ nicht unbedingt einzeln ≤ 1 , aber Robertson vermutete, sie könnten im quadratischen Mittel ≤ 1 sein. Dies wird die Robertsonsche Vermutung genannt.

Ist die Robertsonsche Vermutung für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig, dann folgt auch die Bieberbachsche Vermutung für dasselbe n . Um dies zu zeigen, verwenden wir die Gleichung

$$a_n = \sum_{k=1}^n b_{2k-1} b_{2n-2k+1} = b_1 b_{2n-1} + b_3 b_{2n-3} + \cdots + b_{2n-1} b_1 ,$$

welche per Koeffizientenvergleich gleichbedeutend mit $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$ bzw. $g(z)^2 = f(z^2)$ ist. Mit Hilfe der diskreten Version der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\left(\sum_{k=1}^n A_k B_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n A_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n B_k^2$$

folgt hieraus nämlich die Ungleichung

$$|a_n| = \left| \sum_{k=1}^n b_{2k-1} b_{2n-2k+1} \right| \leq \sum_{k=1}^n |b_{2k-1}|^2 .$$

Robertson bewies seine Vermutung für $n = 3$.

Die Robertsonsche Vermutung bzw. die Erkenntnis Robertson, dass quadratische Mittelwerte eine Rolle spielen könnten, war der zweite fundamentale Schritte zum Beweis der Bieberbachschen Vermutung.

Im nächsten Abschnitt werden wir eine weitere Vermutung kennenlernen, die *Milinsche Vermutung*, welche 1984 schließlich von Louis de Branges bewiesen werden konnte und welche die Robertsonsche Vermutung nach sich zieht. Es ist allerdings bislang kein direkter Beweis der Bieberbachschen oder der Robertsonschen Vermutung bekannt.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer weiteren Version der Löwnerschen Differentialgleichung. Die Löwnersche Differentialgleichung in der Form (42) ist eine *gewöhnliche Differentialgleichung* für die Löwnerkette $f(z, t)$ beschränkter schlichter Funktionen, welche gemäß (41) durch

$$f(z, t) = g^{-1}(f(z), t) \quad (47)$$

erklärt ist. Für die Löwnerkette $g(z, t)$ selbst, s. (40), welche die durch Schlitzverkürzung erzeugte Expansion beschreibt, gilt eine *partielle Differentialgleichung*.

Satz 74 (Löwnersche Differentialgleichung II) Sei $f \in S$ eine Schlitzabbildung mit $f(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Die zugehörige Löwnerkette $g(z, t)$ sei durch (40) erklärt. Dann erfüllt $g(z, t)$ die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial g(z, t)}{\partial t} = \frac{1 + \kappa(t) z}{1 - \kappa(t) z} , \quad (48)$$

wobei $\kappa(t)$ eine stetige komplexwertige Funktion mit $|\kappa(t)| = 1$ ($0 \leq t < \infty$) ist. Ferner gilt die Anfangsbedingung

$$g(z, 0) = f(z) \quad (z \in \mathbb{D}) .$$

Beweis: Die Anfangsbedingung gilt gemäß Definition von $g(z, t)$.

Um die partielle Differentialgleichung zu erhalten, schreiben wir (47) als

$$g(f(z, t), t) = f(z)$$

und leiten nach der Variablen t ab. Dies liefert mit der mehrdimensionalen Kettenregel

$$\frac{\partial g}{\partial w}(w, t) \cdot \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t}(w, t) \Big|_{w=f(z, t)} = 0$$

für alle $w = f(z, t) \in \mathbb{D}$. Ersetzen wir hierin $\frac{\partial f}{\partial t}$ gemäß der Löwnerschen Differentialgleichung (42), erhalten wir schließlich

$$-\frac{\partial g}{\partial w}(w, t) \cdot w \cdot \frac{1 + \kappa(t) w}{1 - \kappa(t) w} + \frac{\partial g}{\partial t}(w, t) = 0$$

und damit (nach Umbenennung $w \mapsto z$) die Behauptung.¹⁹ □

Wir geben schließlich noch eine geometrische Deutung von (48), welche die Löwnertheorie noch einmal auf andere Weise begründet. Die rechte Seite in (48)

$$p(z, t) := \frac{1 + \kappa(t) z}{1 - \kappa(t) z}$$

hat offenbar positiven Realteil.²⁰ Dies heißt aber, dass

$$\left| \arg \frac{\partial}{\partial t} g(z, t) - \arg z g'(z, t) \right| < \frac{\pi}{2}$$

ist. Dies kann wie folgt gedeutet werden. Die komplexe Zahl $z g'(z, t)$ stellt für $z = re^{i\theta}$ einen Normalenvektor auf das Bildgebiet $g(\mathbb{D}_r, t)$ dar, der nach außen zeigt und dessen Richtung höchstens um einen rechten Winkel von der Ausbreitungsrichtung bei der „zeitlichen Änderung“ $\frac{\partial}{\partial t} g(z, t)$ der Löwnerkette abweichen darf. Mit anderen Worten: Die Löwnerkette expandiert mit wachsendem t , und zwar gilt dies für $\mathbb{D}_r$ und alle $r \in (0, 1)$, nicht nur für $r = 1$ (Subordination!).

8 Die Ungleichungen von Lebedev und Milin

Es zeigte sich im Laufe der Jahrzehnte, dass sowohl die Bieberbachsche als auch die Robertsonsche Vermutung sehr schwer zu beweisen waren. Einfacher schien es, Informationen über den Logarithmus $\varphi(z) := \ln \frac{f(z)}{z}$ einer schlichten Funktion zu erhalten. Daher versuchten Lebedev und Milin in den 1960er Jahren, Informationen über die *logarithmischen Koeffizienten*, also die Taylorkoeffizienten von $\varphi(z)$, in Informationen über die Taylorkoeffizienten von $f(z)$ selbst zu konvertieren. Es stellt sich wieder heraus, dass hierbei gewisse quadratische Mittelwerte eine Rolle spielen. Man beachte, dass die Ausführungen dieses Abschnitts *per se* überhaupt nichts mit schlichten Funktionen, nicht einmal mit Funktionentheorie überhaupt, zu tun haben. Es geht einzig und allein um die Koeffizienten von Potenzreihen.

Sei also

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$$

¹⁹Die Differentialgleichung gilt zunächst nur für die Bildpunkte unter $f(z, t)$, es bleibt also ein Schlitz übrig. Dort gilt die Differentialgleichung aus Stetigkeitsgründen.

²⁰Überhaupt stellt sich heraus, dass es zu jeder schlichten Funktion $f(z)$ eine Löwnerkette $g(z, t)$ gibt, für welche $\operatorname{Re} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial t} g(z, t)}{z g'(z, t)} \right) > 0$ ist, unabhängig davon, ob wir eine Schlitzabbildung vor uns haben oder nicht.

eine Potenzreihe mit (positivem) Konvergenzradius R , es gelte also $\varphi(0) = 0$. Dann kann man die Potenzreihe

$$\psi(z) = \exp(\varphi(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k$$

erklären, welche ebenfalls einen positiven Konvergenzradius $\tilde{R} \geq R$ hat. Es gelten dann folgende Ungleichungen zwischen den Koeffizienten α_k und β_k .

Satz 75 (Lebedev-Milinsche Ungleichungen) Seien die Potenzreihen $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$ und $\psi(z) = \exp(\varphi(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k$, $\beta_0 = 1$, mit positivem Konvergenzradius gegeben. Dann gelten folgende Ungleichungen.

(a) **(1. Lebedev-Milinsche Ungleichung)** Falls $\sum_{k=1}^{\infty} k |\alpha_k|^2 < \infty$ ist, gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|^2 \leq \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} k |\alpha_k|^2 \right)$$

mit Gleichheit dann und nur dann, wenn $\alpha_k = \frac{\gamma^k}{k}$ ist für ein $\gamma \in \mathbb{C}$ mit $|\gamma| < 1$, d. h. wenn $\varphi(z) = -\ln(1 - \gamma z)$ und $\psi(z) = \frac{1}{1 - \gamma z}$ ist.

(b) **(2. Lebedev-Milinsche Ungleichung)** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^n |\beta_k|^2 \leq (n+1) \exp \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n (n+1-k) \left(k |\alpha_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \right)$$

mit Gleichheit dann und nur dann, wenn $\alpha_k = \frac{\gamma^k}{k}$ ist für ein $\gamma \in \mathbb{C}$ mit $|\gamma| = 1$.

(c) **(3. Lebedev-Milinsche Ungleichung)** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|\beta_n|^2 \leq \exp \left(\sum_{k=1}^n \left(k |\alpha_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \right)$$

mit Gleichheit dann und nur dann, wenn $\alpha_k = \frac{\gamma^k}{k}$ ist für ein $\gamma \in \mathbb{C}$ mit $|\gamma| = 1$.

Beweis: (a): Wegen $\varphi(0) = 0$ ist $\beta_0 = e^0 = 1$. Wir differenzieren die Gleichung $\psi(z) = e^{\varphi(z)}$ und erhalten $\psi'(z) = \psi(z) \varphi'(z)$. Koeffizientenvergleich liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \alpha_{n-k} \beta_k \quad (n \in \mathbb{N}) \\ \beta_0 &= 1. \end{aligned} \tag{49}$$

Wendet man hierauf die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung mit $A_k = (n-k) \alpha_{n-k} \beta_k$ und $B_k = 1$ an, so erhält man

$$|\beta_n|^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)^2 |\alpha_{n-k}|^2 |\beta_k|^2. \tag{50}$$

Wir setzen nun $a_n := n |\alpha_n|^2$ und erklären induktiv

$$\begin{aligned} b_n &:= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) a_{n-k} b_k \quad (n \in \mathbb{N}) \\ b_0 &:= 1. \end{aligned} \tag{51}$$

Man sieht mittels (50) induktiv, dass $|\beta_n|^2 \leq b_n$ ist. Wir halten also fest, dass $a_n \geq 0$ und $b_n \geq 0$ gilt.

Vergleicht man (51) mit (49), so sieht man schließlich, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \right).$$

Hieraus folgt aber

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} k |\alpha_k|^2 \right),$$

da nach der Voraussetzung der Konvergenzradius ≥ 1 ist und daher jeweils Konvergenz vorliegt. Dies ist die Behauptung.

Gleichheit kann nur eintreten, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ die Beziehung $|\beta_k|^2 = b_k$ gilt. Dann muss aber in (50) Gleichheit eintreten. Gleichheit bei Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung tritt nur ein, falls

$$(n-k) \alpha_{n-k} \beta_k = \lambda_n \quad (k = 0, \dots, n-1) \tag{52}$$

ist für geeignete Konstanten λ_n ($n \in \mathbb{N}$). Insbesondere ist wegen $\beta_0 = 1$ also $n \alpha_n = \lambda_n$. Setzt man (52) in (49) ein, so erhalten wir weiter

$$\beta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_n = \lambda_n,$$

somit $\beta_n = \lambda_n$. Also folgt aus (52)

$$\lambda_{n-k} \lambda_k = \lambda_n$$

und induktiv $\lambda_n = \lambda_1^n$ ($n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$). Setzt man nun schließlich $\gamma = \lambda_1$, so erhält man also $\alpha_n = \frac{\gamma^n}{n}$ und $\beta_n = \gamma^n$ wie behauptet. Die Eigenschaft $|\gamma| < 1$ ist aus Konvergenzgründen erforderlich.

(b): Wir wenden diesmal die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auf (52) mit $A_k = (n-k) \alpha_{n-k}$ und $B_k = \beta_k$ an und erhalten

$$n^2 |\beta_n|^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)^2 |\alpha_{n-k}|^2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |\beta_k|^2 = \sum_{k=1}^n k^2 |\alpha_k|^2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |\beta_k|^2. \tag{53}$$

Zur Vereinfachung schreiben wir

$$A_n := \sum_{k=1}^n k^2 |\alpha_k|^2 \quad \text{und} \quad B_n := \sum_{k=0}^n |\beta_k|^2.$$

Dann liefert (53)

$$\begin{aligned} B_n &= B_{n-1} + |\beta_n|^2 \leq \left(1 + \frac{A_n}{n^2} \right) B_{n-1} \\ &= \frac{n+1}{n} \left(1 + \frac{A_n - n}{n(n+1)} \right) B_{n-1} \\ &\leq \frac{n+1}{n} \exp \left(\frac{A_n - n}{n(n+1)} \right) B_{n-1} \end{aligned}$$

unter Benutzung der Ungleichung $1+x \leq \exp(x)$, s. Abbildung 19, welche für alle $x \in \mathbb{R}$ gültig ist.

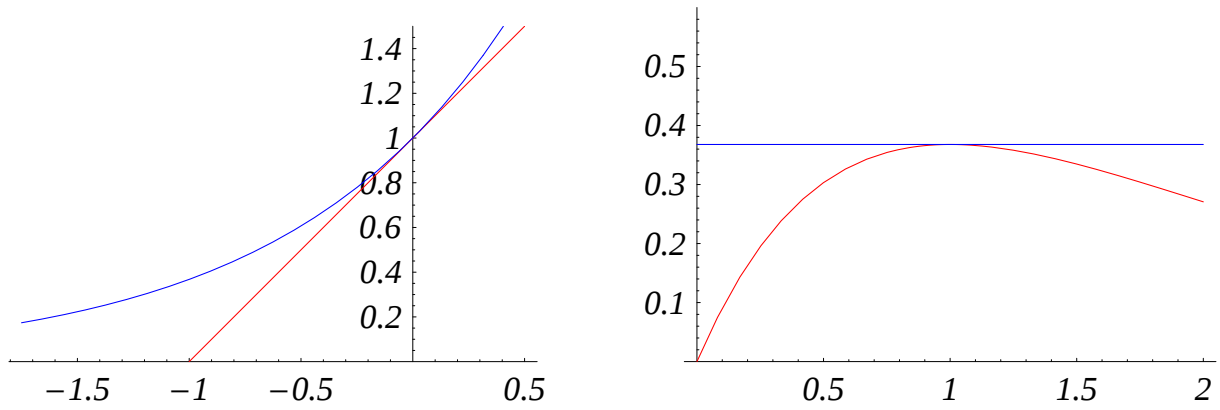


Abbildung 19: Die Ungleichungen $1 + x \leq e^x$ und $x e^{-x} \leq \frac{1}{e}$

Wir wenden nun sukzessive diese Ungleichungen für $B_{n-1}, B_{n-2}, \dots$ an und erhalten

$$B_n \leq (n+1) \exp \left(\sum_{k=1}^n \frac{A_k - k}{k(k+1)} \right) = (n+1) \exp \left(\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{k(k+1)} + 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right).$$

Wegen

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

liefert eine partielle Summation mit $u_k = A_k$ und $v_k = s_{k-1}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n A_k \Delta s_{k-1} = A_n s_n - \sum_{k=1}^n k^2 |\alpha_k|^2 s_{k-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n k^2 |\alpha_k|^2 - \sum_{k=1}^n k^2 |\alpha_k|^2 \left(1 - \frac{1}{k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n k |\alpha_k|^2 - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k^2 |\alpha_k|^2 \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n (n+1-k) k |\alpha_k|^2. \end{aligned}$$

Also ist schließlich

$$\begin{aligned} B_n &\leq (n+1) \exp \left(\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{k(k+1)} + 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right) \\ &\leq (n+1) \exp \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n (n+1-k) \left(k |\alpha_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \right) \\ &= (n+1) \exp \left(\frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^m \left(k |\alpha_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \right). \end{aligned}$$

Dies liefert also die 2. Lebedev-Milinsche Ungleichung. Den Fall der Gleichheit überlassen wir als Übungsaufgabe.

(c): Wendet man die 2. Lebedev-Milinsche Ungleichung auf die rechte Seite der Ungleichung (53) an, so

erhält man

$$\begin{aligned}
|\beta_n|^2 &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 |\alpha_k|^2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |\beta_k|^2 \\
&\leq \frac{A_n}{n} \cdot \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (n-k) \left(k |\alpha_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \right) \\
&= e \frac{A_n}{n} \exp \left(-\frac{A_n}{n} + \sum_{k=1}^n \left(k |\alpha_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \right) .
\end{aligned}$$

Hieraus erhält man die dritte Lebedev-Milinsche Ungleichung mittels der Ungleichung $x e^{-x} \leq \frac{1}{e}$ – s. Abbildung 19 – wenn man $x = \frac{A_n}{n}$ setzt. $\square$

Beispiel 76 (Milinsche Vermutung 1971) *Milin hat erkannt, dass unter Benutzung der 2. Lebedev-Milinschen Ungleichung eine Vermutung über quadratische Mittelwerte der logarithmischen Koeffizienten die Robertsonsche Vermutung und damit auch die Bieberbachsche Vermutung nach sich zieht.*

Milin vermutete, dass für $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \in S$ mit logarithmischen Koeffizienten d_k ,

$$\ln \frac{f(z)}{z} = d_1 z + d_2 z^2 + \dots$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^n (n+1-k) \left(k |d_k|^2 - \frac{4}{k} \right) \leq 0$$

gültig ist. Dies ist die Milinsche Vermutung.

Es gilt

Satz 77 (Vermutungen von Milin, Robertson und Bieberbach) *Gilt die Milinsche Vermutung für ein $n \in \mathbb{N}$, so gilt die Robertsonsche Vermutung und damit auch die Bieberbachsche Vermutung für den Index $n+1$.*

Beweis: Sei $f \in S$ wie oben. Dann gilt für die Quadratwurzeltransformierte

$$h(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \dots$$

die Beziehung

$$\ln \frac{h(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2} \ln \frac{f(z)}{z} ,$$

also

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} z^n = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{2} z^n \right) , \quad b_1 = 1 .$$

Auf diese Situation können wir nun die 2. Lebedev-Milinsche Ungleichung anwenden, und es folgt aus der Milinschen Vermutung

$$\sum_{k=0}^n |b_{2k+1}|^2 \leq (n+1) \exp \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n (n+1-k) \left(\frac{k |d_k|^2}{4} - \frac{1}{k} \right) \right) \leq n+1 .$$

Dies ist aber offenbar die Robertsonsche Ungleichung für die Quadratwurzeltransformierte von f und für den Index $n + 1$. $\square$

Aus der Riesz-Herglotz-Darstellung sternförmiger Funktionen folgt wegen

$$z \frac{f'(z)}{f(z)} = 1 + z \left(\ln \frac{f(z)}{z} \right)' = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n d_n z^n ,$$

dass für sternförmige Funktionen nicht nur die quadratischen Mittelwerte, sondern sogar alle einzelnen Summanden der Milinschen Ungleichung jeweils ≤ 0 sind (Übungsaufgabe). Sternförmige Funktionen erfüllen die Milinsche Vermutung also in besonders weitreichender Form. Dass die Milinsche Vermutung aber auch für alle schlichten Funktionen und für alle $n \in \mathbb{N}$ gültig ist, ist der *Satz von de Branges*.

9 Der Satz von de Branges

Einige Forscher versuchten Anfang der 1980er Jahre, ein numerisches Gegenbeispiel zur Bieberbachschen Vermutung zu finden, und Hummel berichtete, er sei damals sicher gewesen, dass die Bieberbachsche Vermutung ungefähr bei $n = 19$ einbrechen würde. Hummel war es 1976 gelungen, eine Vermutung über die sogenannten Gelferfunktionen durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen.

Hayman und Hummel fanden mit numerischen Methoden Beispiele schlichter Funktionen, deren Koeffizienten im Widerspruch zur Bieberbachschen Vermutung standen. Im Rahmen der Fehlertoleranz der numerischen Berechnungen konnte allerdings hiermit die Bieberbachsche Vermutung nicht widerlegt werden. Mehr und mehr aber schien die Evidenz gegen die Bieberbachsche Vermutung zu sprechen.

Im Frühjahr 1984 sandte de Branges ein Buchmanuskript an namhafte Spezialisten im Bereich der schlichten Funktionen, dessen letztes Kapitel einen Beweis der Milinschen Vermutung enthielt. Aber der Beweis schien Fehler zu enthalten, und kaum einer der Angeschriebenen wird das 385seitige Manuskript vollständig durchgearbeitet haben. De Branges trug seine Ergebnisse im Funktionentheorie-Seminar am Steklov-Institut in Leningrad, dem auch Milin angehört, vor, und im Juni 1984 war den dortigen Seminarteilnehmern klargeworden, dass de Branges' Beweis stimmte!

Emel'yanov hatte die wesentlichen Ideen von de Branges ins Russische übertragen, und Milin arbeitete den funktionentheoretischen Kern der Argumentation heraus und versandte diese Version, die weltweit Verbreitung fand. Kurz nach der Veröffentlichung von de Branges [3] erschien eine vereinfachte Version des Beweises von FitzGerald und Pommerenke [6], welche die Grundlage dieses Abschnitts darstellt.

Die Ausgangsidee von de Branges war: Sowohl die Robertsonsche Vermutung als auch die Milinsche Vermutung waren Aussagen über gewichtete quadratische Mittelwerte der Koeffizienten gewisser analytischer Funktionen. Sie konnten aufgefasst werden als Aussagen über die Norm in gewissen Hilberträumen analytischer Funktionen. Von diesem funktionalanalytischen Gedanken war de Branges geleitet, als ihm folgende Überlegungen gelangen.

Um die Milinsche Vermutung zu zeigen, setze man für gegebenes $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi(t) := \sum_{k=1}^n \tau_k^n(t) \left(k |d_k(t)|^2 - \frac{4}{k} \right) ,$$

wobei das Funktionensystem $(\tau_k^n)_{k=1, \dots, n}$ von Funktionen $\tau_k^n : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ noch festzusetzen sein wird und $d_k(t)$ die logarithmischen Koeffizienten von $e^{-t}g(z, t)$ einer Löwnerkette $g(z, t)$ von f seien.

Der Milinschen Vermutung entspricht dann die Beziehung

$$\varphi(0) \leq 0 ,$$

wenn man

$$\tau_k^n(0) = n + 1 - k \quad (k = 1, \dots, n) \quad (54)$$

setzt. De Branges gelang es nun zu zeigen, dass die Milinsche Vermutung zum Index $n \geq 2$ stimmte, wenn das Funktionensystem $(\tau_k^n)_{k=1, \dots, n+1}$ die Eigenschaften²¹

$$\begin{aligned} \tau_k^n(t) - \tau_{k+1}^n(t) &= -\frac{(\tau_k^n)'(t)}{k} - \frac{(\tau_{k+1}^n)'(t)}{k+1} \quad (k = 1, \dots, n) \\ \tau_{n+1}^n &= 0 , \end{aligned} \quad (55)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_k^n(t) = 0 \quad (k = 1, \dots, n) \quad (56)$$

und

$$(\tau_k^n)'(t) \leq 0 \quad (t \in \mathbb{R}_{\geq 0}) \quad (57)$$

hat, da dann mit der Löwnerschen Differentialgleichung nach längerer Rechnung $\varphi'(t) \geq 0$ und damit $\varphi(0) = -\int_0^\infty \varphi'(t)dt \leq 0$ folgt. Diese Beweisschritte werden wir gleich nachvollziehen.

Somit reduzierte sich die Bieberbachsche Vermutung für den Index $n + 1$ auf die Existenz der Funktionen $(\tau_k^n)_{k=1, \dots, n+1}$ mit den Eigenschaften (54)–(57).

Wir wollen nun zeigen, wofür die Eigenschaften (54)–(57) benötigt werden. Sei also $f \in S$ (o. B. d. A.) eine Schlitzabbildung mit $f(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ und einer Jordankurve Γ , dann gibt es ja eine Löwnerkette

$$g(z, t) = e^t z + \dots \quad (t \geq 0)$$

mit $g(z, 0) = f(z)$, die der Löwnerschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} g(z, t) = \frac{1 + \kappa(t) z}{1 - \kappa(t) z} z \frac{\partial}{\partial z} g(z, t) \quad (58)$$

genügt, wobei $\kappa(t)$ eine stetige Funktion mit $|\kappa(t)| = 1$ ($t \geq 0$) ist.

Wir erklären nun für $t \geq 0$ die logarithmischen Koeffizienten $d_k(t)$ durch

$$\ln \frac{g(z, t)}{e^t z} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(t) z^k \quad (z \in \mathbb{D}) ,$$

so dass $d_k(0) = d_k$ die logarithmischen Koeffizienten von $f(z)$ sind. Wir leiten diese Gleichung nach t ab, benutzen (58) und erhalten

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d'_k(t) z^k &= \frac{\frac{\partial}{\partial t} g(z, t)}{g(z, t)} \\ &= \frac{1 + \kappa(t) z}{1 - \kappa(t) z} \cdot \frac{z \frac{\partial}{\partial z} g(z, t)}{g(z, t)} \\ &= \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\kappa(t)^k z^k \right) \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} k d_k(t) z^k \right) . \end{aligned}$$

²¹Wir ergänzen das System um die Funktion τ_{n+1}^n .

Hieraus erhalten wir durch Koeffizientenvergleich

$$d'_k(t) = 2 \sum_{j=1}^{k-1} j d_j(t) \kappa(t)^{k-j} + k d_k(t) + 2\kappa(t)^k. \quad (59)$$

Wir setzen nun

$$b_k(t) := \sum_{j=1}^k j d_j(t) \kappa(t)^{-j} \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (60)$$

sowie $b_0(t) := 0$. Mit dieser Darstellung wird (59) zu

$$d'_k(t) = \kappa(t)^k \left(b_k(t) + b_{k-1}(t) + 2 \right). \quad (61)$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Dann erklären wir wie angekündigt

$$\varphi(t) := \sum_{k=1}^n \tau_k^n(t) \left(k |d_k(t)|^2 - \frac{4}{k} \right) \quad (t \geq 0) \quad (62)$$

und setzen bereits voraus, dass die Funktionen $\tau_k^n(t)$ die Gleichungen (54)–(57) erfüllen.

Zur Vereinfachung der Formeln lassen wir nun das Argument t in der Folge weg. Aus (60) folgt

$$k d_k = (b_k - b_{k-1}) \kappa^k \quad \text{sowie} \quad k \overline{d_k} = (\overline{b_k} - \overline{b_{k-1}}) \overline{\kappa}^k.$$

Differenziert man nun (62) nach t und benutzt (61), so erhält man

$$\begin{aligned} \varphi' &= \sum_{k=1}^n \tau_k^n \left(k d_k \overline{d_k} - \frac{4}{k} \right)' + \sum_{k=1}^n (\tau_k^n)' \left(k d_k \overline{d_k} - \frac{4}{k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(2 \operatorname{Re} \left(k \overline{d_k} d'_k \right) \right) \tau_k^n + \sum_{k=1}^n (|b_k - b_{k-1}|^2 - 4) \frac{(\tau_k^n)'}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(2 \operatorname{Re} \left((\overline{b_k} - \overline{b_{k-1}})(b_k + b_{k-1} + 2) \right) \right) \tau_k^n + \sum_{k=1}^n (|b_k - b_{k-1}|^2 - 4) \frac{(\tau_k^n)'}{k}. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\operatorname{Re} \left((\overline{b_k} - \overline{b_{k-1}})(b_k + b_{k-1} + 2) \right) = |b_k|^2 - |b_{k-1}|^2 + 2 \operatorname{Re} b_k - 2 \operatorname{Re} b_{k-1}.$$

Wegen $b_0 = 0$ und $\tau_{n+1}^n = 0$ führt eine partielle Summation

$$\sum_{k=1}^n u_k \cdot \Delta_k v_k = u_{n+1} \cdot v_{n+1} - u_1 \cdot v_1 - \sum_{k=1}^n v_{k+1} \cdot \Delta_k u_k$$

mit $u_k = \tau_k^n$ und $v_k = 2 |b_{k-1}|^2 + 4 \operatorname{Re} b_{k-1}$ bei der ersten Summe auf

$$\varphi' = \sum_{k=1}^n (2 |b_k|^2 + 4 \operatorname{Re} b_k) (\tau_k^n - \tau_{k+1}^n) + \sum_{k=1}^n (|b_k - b_{k-1}|^2 - 4) \frac{(\tau_k^n)'}{k}. \quad (63)$$

Nun folgt aus der Differentialgleichung (54) für die erste Summe

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2 |b_k|^2 + 4 \operatorname{Re} b_k) (\tau_k^n - \tau_{k+1}^n) &= - \sum_{k=1}^n (2 |b_k|^2 + 4 \operatorname{Re} b_k) \left(\frac{(\tau_k^n)'}{k} + \frac{(\tau_{k+1}^n)'}{k+1} \right) \\ &= - \sum_{k=1}^n (2 |b_k|^2 + 4 \operatorname{Re} b_k + 2 |b_{k-1}|^2 + 4 \operatorname{Re} b_{k-1}) \frac{(\tau_k^n)'}{k}. \end{aligned}$$

Kombiniert man nun die beiden Summen in (63), so erhält man schließlich

$$\varphi'(t) = - \sum_{k=1}^n |b_{k-1}(t) + b_k(t) + 2|^2 \frac{(\tau_k^n)'(t)}{k} .$$

Folglich ist wegen (57) $\varphi'(t) \geq 0$ für $t \geq 0$. Dies ist der Schlüssel zum Erfolg.

Da die Funktionen $e^{-t} g(z, t) \in S$ liegen, sind die logarithmischen Koeffizienten $d_k(t)$ für $t \rightarrow \infty$ beschränkt. Ferner strebt wegen (56) $\tau_k^n(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen 0. Daher ist auch

$$\varphi(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0 ,$$

so dass schließlich die Milinsche Ungleichung

$$\sum_{k=1}^n (n+1-k) \left(k |d_k|^2 - \frac{4}{k} \right) = \varphi(0) - \varphi(\infty) = - \int_0^\infty \varphi'(t) dt \leq 0$$

folgt. Den Fall der Gleichheit untersuchen wir hier nicht, es lässt sich aber nun auch relativ einfach zeigen, dass nur die Drehungen der Koebeffunktion Gleichheit liefern [6].

Was nun also schließlich noch fehlt, ist der Beweis, dass es Funktionen τ_k^n mit den 4 Eigenschaften (54)–(57) wirklich gibt. Vor dieser Frage stand 1984 auch de Branges. Er konnte zwar von Hand die Bieberbachsche Vermutung bis $n = 6$ verifizieren, aber es fehlte ihm immer noch ein genereller Beweis.

Die beiden Gleichungen (54)–(55) bilden ein System von Differentialgleichungen mit Anfangswerten. Ein solches Anfangswertproblem hat eine eindeutige Lösung, wie man in der Theorie der Differentialgleichungen zeigt.

De Branges war es gelungen, diese Lösungen explizit anzugeben:

$$\tau_k^n(t) = k \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \frac{(2k+j+1)_j (2k+2j+2)_{n-k-j}}{(k+j) j! (n-k-j)!} e^{-(j+k)t} \quad (k = 1, \dots, n) ,$$

wobei $(a)_j := a(a+1) \cdots (a+j-1)$ das *Pochhammersymbol* bezeichnet.

Man zeigt nun leicht durch Einsetzen, dass diese Funktionen die Gleichungen (54)–(55) erfüllen. Außerdem sieht man wegen der Exponentialfaktoren auch Gleichung (56) sofort ein. Warum aber sollten die Ungleichungen (57) gelten? Dass diese Ungleichungen „schwierig“ sind, sieht man an dem stark oszillierenden Charakter von $(\tau_k^n)'(t)$, s. Abbildung 20.

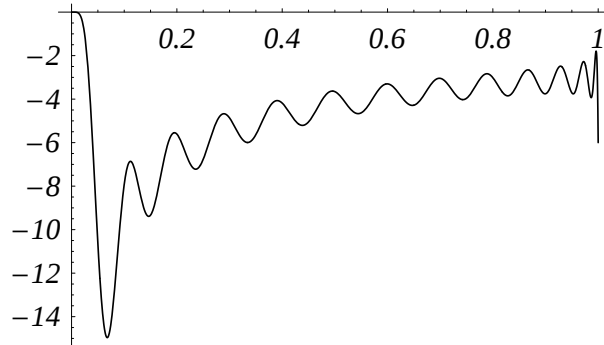


Abbildung 20: Die Funktion $(\tau_k^n)'(t)$ für $k = 6$ und $n = 30$ mit $y = e^{-t}$ für $y \in [0, 1]$.

Es ist

$$(\tau_k^n)'(t) = k \sum_{j=k}^n (-1)^{k+j+1} \binom{2j}{j-k} \binom{n+j+1}{n-j} e^{-jt}.$$

Mittels dieser Darstellung verifizierte de Branges (57) – wie bereits erwähnt – von Hand bis $n = 5$. Dann ließ er (57) numerisch bis $n = 30$ überprüfen, während dessen es sich herausstellte, dass (57) ein von Askey und Gasper 1976 bewiesener Satz war! Dies vervollständigte den Beweis der Milinschen Vermutung [3]. Auf die *Askey-Gasper-Ungleichung* (57) kommen wir später nochmals zurück. Es gilt also er

Satz 78 (Satz von de Branges 1985) *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f \in S$. Die Milinsche Vermutung ist richtig, es gilt also für die logarithmischen Koeffizienten die Ungleichung*

$$\sum_{k=1}^n (n+1-k) \left(k |d_k|^2 - \frac{4}{k} \right) \leq 0.$$

Bei Gleichheit ist f eine Drehung der Koebeffunktion.

10 Der Beweis von Weinstein

Nachdem nun klar war, dass die Milinsche Vermutung stimmte, konnte man etwas mutiger sein und versuchen, sie für alle $n \in \mathbb{N}$ gleichzeitig zu beweisen. Dies war 1991 die Idee von Lenard Weinstein [19].

Die Löwnersche Differentialgleichung in der Form

$$\operatorname{Re} p(z, t) > 0 \quad \text{für} \quad p(z, t) := \left(\frac{\frac{\partial}{\partial t} g(z, t)}{z \frac{\partial}{\partial z} g(z, t)} \right) \quad (64)$$

ist ein Charakteristikum schlichter Funktionen, denn es gibt für alle $f \in S$ eine Löwnerkette $g(z, t)$. Weiter kann man zeigen, dass unter sehr allgemeinen Voraussetzungen an die Funktion $p(z, t)$ mit positivem Realteil aus der Schlichtheit von $g(z, 0)$ die von $g(z, t)$ ($t > 0$) folgt.

Weinstein verwendet die Löwnersche Differentialgleichung in der Form (64). Ferner wird die Cauchyformel benutzt, um die partiellen Zeitableitungen der logarithmischen Koeffizienten $d_k(t)$ der Löwnerkette in der Form ($\zeta = re^{i\theta}$, $r \in (0, 1)$)

$$d_k'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial t} g(\zeta, t)}{g(\zeta, t)} \frac{d\theta}{\zeta^k} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial t} g(\zeta, t)}{g(\zeta, t)} \bar{\zeta}^k d\theta \quad (65)$$

darzustellen. Sei nun $z \in \mathbb{D}$ und sei $w(z, t) := K^{-1}(e^{-t} K(z))$, gelte also

$$\frac{z}{(1-z)^2} = e^t \frac{w}{(1-w)^2} \quad (t \geq 0). \quad (66)$$

Die Funktion $w(z, t)$ ist eine spezielle Löwnerfamilie beschränkter schlichter Funktionen, deren Bildgebiet mit wachsendem t eine radial geschlitzte Einheitskreisscheibe mit wachsendem Schlitz ist, s. Abbildung 21.

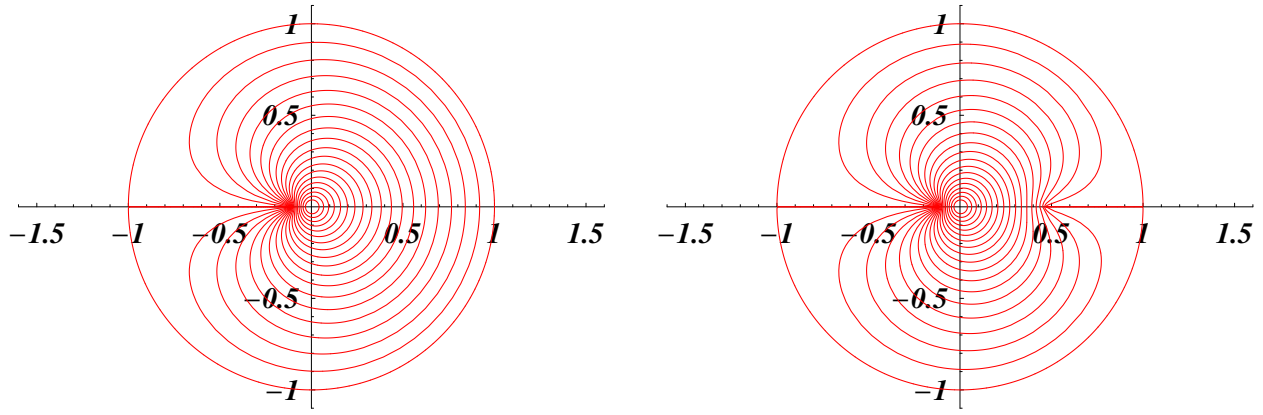


Abbildung 21: Beschränkte Löwnerkette der Koebe-Funktion bzw. der Funktion $h_\theta^{-1}(e^{-t}h_\gamma)$, s. (72)

Wie jede Löwnerkette verbindet $w(z, t)$ die identische Abbildung $w(z, 0) = z$ mit der „Startfunktion“ $\lim_{t \rightarrow \infty} e^t w(z, t) = K(z)$. Damit ist wegen der Normierung natürlich auch $w(z, \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} w(z, t) = 0$. Man kann für $w(z, t)$ die folgende explizite Darstellung

$$w(z, t) = \frac{4e^{-t}z}{(1 - z + \sqrt{1 - 2xz + z^2})^2} \quad \text{mit} \quad e^{-t} = \frac{1 - x}{2}$$

herleiten (Übungsaufgabe), welche allerdings für den Weinsteinschen Beweis nicht relevant ist.

Ableiten der Identität

$$K(w(z, t)) = e^{-t}K(z)$$

führt zu der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t} w = -w \frac{1 - w}{1 + w}, \quad (67)$$

welche wir ebenfalls benötigen werden.

Anstatt die Milinsche Vermutung für jedes einzelne $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen, versucht Weinsten – wie bereits erwähnt –, den Beweis für alle $n \in \mathbb{N}$ gleichzeitig zu führen, indem er eine *erzeugende Funktion* betrachtet. Wegen der Kompaktheit von S konvergiert die erzeugende Funktion der (negativen) Milinschen Ausdrücke absolut und lokal gleichmäßig in $\mathbb{D}$, und eine Umordnung der Doppelsumme liefert

$$\begin{aligned} \omega(z) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n (n+1-k) \left(\frac{4}{k} - k |d_k(0)|^2 \right) \right) z^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{k} - k |d_k(0)|^2 \right) \left(\sum_{n=k}^{\infty} (n+1-k) \right) z^{n+1} \\ &= \frac{z}{(1-z)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{k} - k |d_k(0)|^2 \right) z^k. \end{aligned}$$

Man beachte, dass auf diese Weise automatisch die Koebe-Funktion als Faktor entsteht! Mit (66) und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt sich nun wegen $w(z, \infty) = 0$ und $w(z, 0) = z$

$$\omega(z) = \int_0^\infty -\frac{z}{(1-z)^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{k} - k |d_k(t)|^2 \right) w^k \right) dt$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(66)}{=} \int_0^\infty -\frac{e^t w}{(1-w)^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{4}{k} - k |d_k(t)|^2 \right) w^k \right) dt \\
& \stackrel{(67)}{=} \int_0^\infty \frac{e^t w}{1-w^2} \left(\frac{1+w}{1-w} \sum_{k=1}^\infty k \left(d_k(t) \overline{d_k(t)} \right)' w^k + \sum_{k=1}^\infty (4 - k^2 |d_k(t)|^2) w^k \right) dt \\
& \stackrel{(65)}{=} \int_0^\infty \frac{e^t w}{1-w^2} \left(\frac{1+w}{1-w} \left(1 + \sum_{k=1}^\infty \left(\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial g(\zeta, t)}{g(\zeta, t)} k \overline{d_k(t)} \bar{\zeta}^k d\theta \right) w^k \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1+w}{1-w} \left(1 + \sum_{k=1}^\infty \left(\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \overline{g(\zeta, t)}}{g(\zeta, t)} k d_k(t) \zeta^k d\theta \right) w^k \right) \right. \\
& \quad \left. - 2 \frac{1+w}{1-w} + \frac{4w}{1-w} - \sum_{k=1}^\infty k^2 |d_k(t)|^2 w^k \right) dt \\
& = \int_0^\infty \frac{e^t w}{1-w^2} \left(\left(1 + \sum_{k=1}^\infty 2 w^k \right) \left(1 + \sum_{k=1}^\infty \left(\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial g(\zeta, t)}{g(\zeta, t)} k \overline{d_k(t)} \bar{\zeta}^k d\theta \right) w^k \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(1 + \sum_{k=1}^\infty 2 w^k \right) \left(1 + \sum_{k=1}^\infty \left(\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \overline{g(\zeta, t)}}{g(\zeta, t)} k d_k(t) \zeta^k d\theta \right) w^k \right) \right. \\
& \quad \left. - 2 - \sum_{k=1}^\infty k^2 |d_k(t)|^2 w^k \right) dt \\
& = \int_0^\infty \frac{e^t w}{1-w^2} \left(\left(1 + \sum_{k=1}^\infty \left(\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial g(\zeta, t)}{g(\zeta, t)} \left(2 + 2 \sum_{j=1}^k j \overline{d_j(t)} \bar{\zeta}^j - k \overline{d_k(t)} \bar{\zeta}^k \right) d\theta \right) w^k \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(1 + \sum_{k=1}^\infty \left(\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \overline{g(\zeta, t)}}{g(\zeta, t)} \left(2 + 2 \sum_{j=1}^k j d_j(t) \zeta^j - k d_k(t) \zeta^k \right) d\theta \right) w^k \right) \right. \\
& \quad \left. - 2 - \sum_{k=1}^\infty k^2 |d_k(t)|^2 w^k \right) dt \\
& \stackrel{(64)}{=} \int_0^\infty \frac{e^t w}{1-w^2} \left(\left(\sum_{k=1}^\infty \left(\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\zeta, t) \left(1 + \sum_{j=1}^\infty j d_j(t) \zeta^j \right) \left(2 + 2 \sum_{j=1}^k j \overline{d_j(t)} \bar{\zeta}^j - k \overline{d_k(t)} \bar{\zeta}^k \right) d\theta \right) w^k \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\sum_{k=1}^\infty \left(\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{p(\zeta, t)} \left(1 + \sum_{j=1}^\infty j \overline{d_j(t)} \bar{\zeta}^j \right) \left(2 + 2 \sum_{j=1}^k j d_j(t) \zeta^j - k d_k(t) \zeta^k \right) d\theta \right) w^k \right) \right. \\
& \quad \left. - \sum_{k=1}^\infty k^2 |d_k(t)|^2 w^k \right) dt \\
& \stackrel{(*)}{=} \int_0^\infty \frac{e^t w}{1-w^2} \left(\sum_{k=1}^\infty \left(\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} p(\zeta, t) \left| 2 + 2 \sum_{j=1}^k j d_j(t) \zeta^j - k d_k(t) \zeta^k \right|^2 d\theta \right) w^k \right) \\
& = \int_0^\infty \frac{e^t w}{1-w^2} \sum_{k=1}^\infty A_k(t) w^k dt
\end{aligned}$$

mit

$$A_k(t) := \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} p(\zeta, t) \left| 2 + 2 \sum_{j=1}^k j d_j(t) \zeta^j - k d_k(t) \zeta^k \right|^2 d\theta . \quad (68)$$

Dabei gelingt die letzte entscheidende Umformung $(\star)$ durch Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes, der garantiert, dass die Integrale bzgl. θ bzw. ζ aller nicht in dem vollständigen Quadrat berücksichtigten Terme aufgrund der Analytizität der Integranden wegfallen, denn alle auftretenden Integrale enthalten Terme der Form $p(\zeta, t) \zeta^j$ multipliziert mit Konstanten, welche nicht von ζ abhängen. Hierbei können wir wegen $r \rightarrow 1$ das Konjugierte $\bar{\zeta}$ durch ζ^{-1} ersetzen. Auf diese Art wird aus der ersten Zeile vor $(\star)$ beispielsweise

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\zeta, t) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} j d_j(t) \zeta^j \right) \left(2 + 2 \sum_{j=1}^k j \bar{d}_j(t) \bar{\zeta}^j - k \overline{d_k(t)} \bar{\zeta}^k \right) d\theta \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} p(\zeta, t) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} j d_j(t) \zeta^j \right) \left(2 + 2 \sum_{j=1}^k j \bar{d}_j(t) \zeta^{-j} - k \overline{d_k(t)} \zeta^{-k} \right) \frac{d\zeta}{i\zeta} \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{p(\zeta, t)}{2} \left(2 + 2 \sum_{j=1}^k j d_j(t) \zeta^j \right) \left(2 + 2 \sum_{j=1}^k j \bar{d}_j(t) \zeta^{-j} - k \overline{d_k(t)} \zeta^{-k} \right) \frac{d\zeta}{i\zeta} \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{p(\zeta, t)}{2} \left(2 + 2 \sum_{j=1}^k j d_j(t) \zeta^j - k d_k(t) \zeta^k \right) \left(2 + 2 \sum_{j=1}^k j \bar{d}_j(t) \zeta^{-j} - k \overline{d_k(t)} \zeta^{-k} \right) \frac{d\zeta}{i\zeta} \\ &\quad + \frac{1}{2} k^2 |d_k|^2 , \end{aligned}$$

wobei der letzte Summand die Korrektur ist, die durch das Produkt des negativen Summanden des ersten Klammersausdrucks mit dem Koeffizienten von ζ^{-k} des zweiten Klammersausdrucks entsteht:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{p(\zeta)}{2} (k d_k(t) \zeta^k) (k \overline{d_k(t)} \zeta^{-k}) \frac{d\zeta}{i\zeta} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{1}{2\zeta} d\zeta (k^2 |d_k|^2) = \frac{1}{2} k^2 |d_k|^2 .$$

Eine analoge Rechnung kann bei dem konjugiert-analytischen Term der zweiten Zeile durchgeführt werden und führt zu einem ähnlichen Resultat.

Schreiben wir nun

$$\frac{e^t w^{k+1}}{1 - w^2} =: \sum_{n=k}^{\infty} \Lambda_k^n(t) z^{n+1} , \quad (69)$$

so ist schließlich

$$\omega(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^n(t) A_k(t) dt \right) z^{n+1} , \quad (70)$$

also gemäß Definition der erzeugenden Funktion $\omega(z)$

$$\sum_{k=1}^n (n+1-k) \left(\frac{4}{k} - k |d_k|^2 \right) = \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^n(t) A_k(t) dt .$$

Die Milinsche Vermutung ist nun offenbar äquivalent zu der Tatsache, dass diese Koeffizienten von ω alle nichtnegativ sind. Wegen $\operatorname{Re} p(\zeta, t) > 0$ (64) und der Darstellung (68) ist andererseits

$$A_k(t) \geq 0 \quad (t \geq 0) ,$$

so dass die Milinsche Vermutung folgt, falls

$$\Lambda_k^n(t) \geq 0 \quad (t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 1, \dots, n), \quad (71)$$

denn dann ist auch

$$\sum_{k=1}^n (n+1-k) \left(\frac{4}{k} - k |d_k|^2 \right) = \int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty \Lambda_k^n(t) A_k(t) dt \geq 0.$$

Die Behauptung $\Lambda_k^n(t) \geq 0$ ist nun wiederum eine Positivitätsaussage spezieller reellwertiger Funktionen, welche durch (69) erklärt sind und mit der Koebefunktion und damit mit der Theorie der schlichten Funktionen in direktem Zusammenhang stehen.

Das Bildgebiet von $w = K^{-1}(e^{-t}K)$ ist die auf der negativen reellen Achse geschlitzte Einheitskreisscheibe. Beachtet man, dass die Abbildung ($\gamma \in \mathbb{R}$)

$$h_\gamma(z) := \frac{z}{1 - 2 \cos \gamma \cdot z + z^2}$$

die Einheitskreisscheibe für $\gamma \neq 0 \pmod{\pi}$ auf eine mit zwei auf der reellen Achse liegenden Schlitzten versehene Ebene abbildet, kann man w auch auffassen als Komposition (s. Abbildung 21)

$$w = h_\theta^{-1}(e^{-t}h_\gamma) \quad (72)$$

für ein geeignetes Paar (θ, γ) , und eine Rechnung zeigt, dass dann die Beziehung

$$\cos \gamma = (1 - e^{-t}) + e^{-t} \cos \theta \quad (73)$$

gilt (Übungsaufgabe). Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} h_\gamma(z) &= e^t \cdot h_\theta(w) = \frac{e^t w}{1 - w^2} \left(\frac{1 - w^2}{1 - 2 \cos \theta \cdot w + w^2} \right) \\ &= \frac{e^t w}{1 - w^2} \operatorname{Re} \frac{1 + e^{i\theta} w}{1 - e^{i\theta} w} = \frac{e^t w}{1 - w^2} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^\infty w^k \cos k\theta \right) \\ &= \frac{e^t w}{1 - w^2} + 2 \sum_{k=1}^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty \Lambda_k^n(t) z^{n+1} \right) \cos k\theta. \end{aligned} \quad (74)$$

Es ist

$$\eta(z) := \sqrt{\frac{h_\gamma(z)}{z}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \cos \gamma \cdot z + z^2}}$$

die erzeugende Funktion der Legendrepolynome $P_n(x)$, und es folgt aus (73) und dem Additionstheorem der Legendrepolynome²²

$$P_n(x^2 + (1 - x^2) \cos \theta) = P_n(x)^2 + 2 \sum_{j=1}^n \frac{(n-j)!}{(n+j)!} P_n^j(x)^2 \cos j\theta,$$

welches bereits 1782 von Laplace veröffentlicht wurde, eine explizite Darstellung der Form

$$\eta(z) = \sum_{n=0}^\infty \nu_n^2 z^n + 2 \sum_{k=1}^\infty \left(\sum_{n=k}^\infty \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \mu_{kn}^2 z^n \right) \cos k\theta$$

haben muss, wo γ eine Function von x bezeichnet. Hieraus erhält man endlich die Entwicklung

$$(52) \dots P^n(x x_1 - \sqrt{x^2 - 1} \sqrt{x_1^2 - 1} \cos \varphi) \\ = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu a_\nu^{(n)} P_\nu^n(x) P_\nu^n(x_1) \cos \nu \varphi,$$

wenn $a_\nu^{(n)}$ eine numerische Constante bezeichnet, und zwar, wie sich sogleich zeigen wird, dieselbe, welche bereits im § 62, S. 253 auftrat, nämlich

$$(46, a) \dots a_\nu^{(n)} = 2 \cdot \frac{[1.3 \dots (2n-1)]^\nu}{\Pi(n+\nu) \Pi(n-\nu)},$$

von der eine für die Theorie wichtige Eigenschaft durch (46, b) ausgedrückt wird,

Abbildung 22: Das Additionstheorem der Legendrepolynome in Heines Buch ([8], 1878)

$$(\nu_n, \mu_{kn} \in \mathbb{R} \quad (k, n \in \mathbb{N}))$$

mit offensichtlich nichtnegativen Koeffizienten. Quadriert man dieses Ergebnis, sieht man mit (74), dass auch (71) und damit die Milinsche Vermutung erfüllt ist.

Den Beweis der BV, der nunmehr vorliegt, hätte bereits Bieberbach bei der Formulierung seiner Vermutung nachvollziehen können. Seine Geschichte zeigte aber, dass nicht ein Forscher allein alle zum Beweis nötigen Ingredienzien zusammentrug, sondern das Puzzle wurde von vielen zusammengesetzt. Insbesondere

- die Einführung der Dynamik schlichter Funktionen und der beschreibenden Differentialgleichung durch Löwner,
- die Entdeckung der Relevanz gewichteter quadratischer Mittelwerte durch Robertson,
- die Exponentiation der logarithmischen Koeffizienten durch Lebedev und Milin
- sowie die systematische Untersuchung einer besonderen dynamischen Variante der Milinschen Vermutung durch de Branges

führten schließlich zum direkten Nachweis der Milinschen Vermutung durch Anwendung der speziellen von der Koebe-funktion generierten Löwnerkette durch Weinsten.

11 Die Funktionensysteme von de Branges und Weinsten

In diesem Abschnitt werden wir uns weiter mit den Funktionensystemen beschäftigen, die de Branges bzw. Weinsten eingeführt hatten.

Es gibt nämlich folgenden interessanten Zusammenhang zwischen beiden Funktionensystemen $\tau_k^n(t)$ und $\Lambda_k^n(t)$, welcher beweist, dass die entscheidenden Ungleichungen für den Erfolg des jeweiligen Beweises *genau dieselben* sind. Dadurch wird im Nachhinein klar, dass auch die Funktionen, die de Branges eingeführt hat, direkt mit der Koebe-funktion zusammenhängen.

Satz 79 (Todorov 1992, Wilf 1994) *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $k = 1, \dots, n$. Dann gilt*

$$(\tau_k^n)'(t) = -k \Lambda_k^n(t). \quad (75)$$

²²Abbildung 22 zeigt einen Ausschnitt von Seite 312 des Buchs von E. Heine, s. <http://cdl.library.cornell.edu>.

Beweis: (Koepf/Schmersau 1996) Die Funktionen $\tau_k^n(t)$ sind eindeutig erklärt durch die Beziehungen (54)–(55). Daher sind die Funktionen $(\tau_k^n)'(t)$ gegeben durch dasselbe Differentialgleichungssystem (55), die Gleichung

$$(\tau_k^n)'(t) = -n e^{-nt} \quad (76)$$

und die Anfangswerte

$$(\tau_k^n)'(0) = \begin{cases} -k & \text{falls } n - k \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n - k \text{ ungerade} \end{cases} . \quad (77)$$

Um (75) zu beweisen, werden wir zeigen, dass die Funktionen $y_n(t) := -k \Lambda_k^n(t)$ diese Eigenschaften haben.

Wir schreiben für die erzeugende Funktion der Weinstein-Funktionen

$$W_k(z, t) := \frac{e^t w(z, t)^{k+1}}{1 - w^2(z, t)} = \sum_{n=k}^{\infty} \Lambda_k^n(t) z^{n+1} \quad (78)$$

und lassen nun der Einfachheit halber wieder die Argumente weg. Man sieht, dass

$$W_{k+1}(z, t) = \frac{e^t w^{k+2}}{1 - w^2} = w W_k(z, t) \quad (79)$$

ist und außerdem

$$W_k(z, t) = \frac{e^t w^{k+1}}{1 - w^2} = \frac{e^t w}{(1 - w)^2} \frac{1 - w}{1 + w} w^k = K(z) \frac{1 - w}{1 + w} w^k . \quad (80)$$

Aus (79) und (80) erhalten wir die Gleichung

$$W_k(z, t) + W_{k+1}(z, t) = (1 + w) W_k(z, t) = K(z) (1 - w) w^k = K(z) w^k - K(z) w^{k+1} .$$

Leiten wir diese nun nach der Variablen t ab, so bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W_k(z, t) + \frac{\partial}{\partial t} W_{k+1}(z, t) &= K(z) \cdot k w^{k-1} w' - K(z) \cdot (k + 1) w^k w' \\ &= -k \cdot K(z) \frac{1 - w}{1 + w} w^k + (k + 1) \cdot K(z) \frac{1 - w}{1 + w} w^{k+1} \\ &= (k + 1) W_{k+1}(z, t) - k W_k(z, t) \end{aligned} \quad (81)$$

wobei wir wieder die Gleichung (67) für w' benutzt haben.

Vergleicht man nun die Koeffizienten in (78), so folgt, dass dasselbe Differentialgleichungssystem auch für die Funktionen $\Lambda_k^n(t)$ gültig ist. Damit gilt für $y_k^n(t) = -k \Lambda_k^n(t)$ die Beziehung

$$y_{k+1}^n(t) - y_k^n(t) = \frac{(y_k^n)'(t)}{k} + \frac{(y_{k+1}^n)'(t)}{k + 1} .$$

Dies ist das Differentialgleichungssystem (55) von de Branges.

Aus der Gleichung

$$\Lambda_n^n(t) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{W_n(z, t)}{z^{n+1}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^t}{1 - w^2(z, t)} \left(\frac{w(z, t)}{z} \right)^{n+1} = e^t \left(e^{-(n+1)t} \right) = e^{-nt}$$

welche aus (78) folgt, sehen wir, dass

$$y_n^n(t) = -n e^{-nt}$$

ist, so dass (76) erfüllt ist.

Um schließlich (75) zu zeigen, bleibt also die Gleichung (77) zu beweisen, die aus

$$W_k(z, 0) = \frac{z^{k+1}}{1 - z^2} = \sum_{j=0}^{\infty} z^{2j+k} = \sum_{n=k}^{\infty} \Lambda_k^n(0) z^{n+1}$$

abgelesen werden kann. □

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer weiteren erzeugenden Funktion

$$B_k(z, t) := \sum_{n=k}^{\infty} \tau_k^n(t) z^{n+1} \quad (82)$$

der Funktionen von de Branges, welche noch einmal den Zusammenhang mit der Koebe-funktion unterstreicht.

Während de Branges die Milinsche Vermutung für jeweils ein festes $n \in \mathbb{N}$ betrachtete und hierfür die Funktionen $\tau_k^n(t)$ ($k = 1, \dots, n$) einführte, nehmen wir uns nun ein festes $k \in \mathbb{N}$ und betrachten die erzeugende Funktion von $\tau_k^n(t)$ bzgl. n , d. h., alle $n \geq k$ werden hierbei *gleichzeitig* betrachtet.

Satz 80 (Koepf/Schmersau 1996) *Die erzeugende Funktion der de Branges Funktionen (82) hat die Darstellung $(x = 1 - 2e^{-t})$*

$$B_k(z, t) = \sum_{n=k}^{\infty} \tau_k^n(t) z^{n+1} = K(z) w(z, t)^k = K(z) \left(\frac{4e^{-t}z}{(1 - z + \sqrt{1 - 2xz + z^2})^2} \right)^k. \quad (83)$$

Beweis: Wir erklären $C_k(z, t)$ durch

$$C_k(z, t) := K(z) w(z, t)^k. \quad (84)$$

Dann ist zunächst

$$\frac{\partial}{\partial t} C_k(z, t) = K(z) k w^{k-1} w'.$$

Unter Benutzung von (67) erhalten wir also

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial}{\partial t} C_{k+1}(z, t)}{k+1} + \frac{\frac{\partial}{\partial t} C_k(z, t)}{k} &= K(z) w^{k-1} w' (1 + w) \\ &= -K(z) w^k (1 - w) = K(z) w^{k+1} - K(z) w^k \\ &= C_{k+1}(z, t) - C_k(z, t). \end{aligned} \quad (85)$$

Gemäß Definition (84) von $C_k(z, t)$ startet die Taylorreihe um den Ursprung $z = 0$ mit dem Term z^{k+1} . Also gilt

$$C_k(z, t) = \sum_{n=k}^{\infty} y_k^n(t) z^{n+1} \quad (86)$$

und wir können $y_{n+1}^n(t) \equiv 0$ setzen. Setzt man nun (86) in (85) ein, so sieht man durch Koeffizientenvergleich von z^{n+1} , dass die Funktionen $y_k^n(t)$ die Differentialgleichung (55) von de Branges erfüllen. Der $(n+1)$ -ste Taylorkoeffizient von

$$C_k(z, 0) = K(z) w(z, 0)^k = \frac{z^{k+1}}{(1 - z)^2}$$

ist offenbar $n+1-k$, also haben die Funktionen $y_k^n(t)$ auch den richtigen Anfangswert (54). Daher sind $y_k^n(t)$ die de Branges Funktionen $y_k^n(t) = \tau_k^n(t)$. Also ist $B_k(z, t) = C_k(z, t)$.

Aus der expliziten Darstellung

$$w(z, t) = \frac{4e^{-t}z}{(1 - z + \sqrt{1 - 2xz + z^2})^2}$$

für $w(z, t)$ folgt schließlich die rechte Seite von (83). □

12 Die Askey-Gasper-Identität

Im letzten Abschnitt dieser Vorlesung wollen wir den Beweis der Bieberbachschen Vermutung insofern zu Ende führen, als dass wir die Askey-Gasper-Ungleichung, welche den beiden essentiellen Ungleichungen $(\tau_k^n)'(t) \leq 0$ und $\Lambda_k^n(t) \geq 0$ entspricht, die die Beweise von de Branges und Weinstein vervollständigten, nun genauer untersuchen wollen.

Zunächst ist klar: Wegen Satz 79 hat auch Weinstein mit Hilfe des Legendreschen Additionstheorems die Askey-Gasper-Ungleichung bewiesen. Allerdings haben Askey und Gasper eine weitreichendere Ungleichung bewiesen als die im Beweis von de Branges benutzte. Diese wollen wir uns nun ansehen.

Zunächst führen wir den Begriff der *hypergeometrischen Funktion* ein, welcher zum Verständnis der Askey-Gasper-Ungleichung zugrundeliegenden *Askey-Gasper-Identität* essentiell ist. Wir sehen uns hierzu die Funktionen $(\tau_k^n)'(t)$ etwas genauer an.

Beispiel 81 *Fasst man die Funktionen $(\tau_k^n)'(t)$ als Funktionen der Variablen $y = e^{-t}$ auf, so sind dies Polynome, welche wir nun $T_k^n(y)$ nennen wollen. Wir hatten bereits die explizite Darstellung*

$$T_k^n(y) = k \sum_{j=k}^n (-1)^{k+j+1} \binom{2j}{j-k} \binom{n+j+1}{n-j} y^j$$

dieser Polynome betrachtet. Wir schreiben diese nun in eine Normalform um. Als erstes soll die Summe mit dem Summationsindex 0 beginnen. Daher benutzen wir die Summationsvariable $j' = j - k$, setzen also $j = j' + k$ und erhalten

$$\begin{aligned} T_k^n(y) &= y^k k \sum_{j'=0}^{n-k} (-1)^{j'+2k+1} \binom{2(j'+k)}{j'} \binom{n+j'+k+1}{n-j'-k} y^{j'} \\ &= y^k k \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{j+1} \binom{2(j+k)}{j} \binom{n+j+k+1}{n-j-k} y^j. \end{aligned}$$

Zum Schluss haben wir die Summationsvariable wieder j genannt. Man sieht, dass die Funktionen $T_k^n(y)$ den Faktor y^k enthalten, der für die Frage, ob das Polynom im offenen Intervall $(0, 1)$ Nullstellen besitzt, irrelevant ist. Diesen sowie den Vorfaktor k können wir also weglassen und wir erhalten dann also die Polynome

$$t_k^n(y) := \frac{T_k^n(y)}{k y^k} = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{j+1} \binom{2(j+k)}{j} \binom{n+j+k+1}{n-j-k} y^j = \sum_{j=0}^{n-k} A_j(k, n, y).$$

Eine derartige Summe heißt *hypergeometrisch*, falls der Summand A_j die Eigenschaft hat, dass der Quotient $\frac{A_{j+1}}{A_j} = R(j) \in \mathbb{Q}(j)$ eine rationale Funktion bzgl. der Summationsvariablen j ist. Der Summand wird dann *hypergeometrischer Term* genannt. Dies ist hier der Fall. Wir erhalten nämlich (Übungsaufgabe)

$$\frac{A_{j+1}(k, n, y)}{A_j(k, n, y)} = \frac{(2j+2k+1)(n-j-k)(j+k+n+2)}{(j+2k+1)(2j+2k+3)} \frac{y}{j+1} \quad (87)$$

Im vorliegenden Fall ist $A_j(k, n, y)$ übrigens auch bzgl. der anderen beiden „diskreten“ Variablen k und n ein hypergeometrischer Term. Abhängig von der Anzahl der Linearfaktoren im Zähler

(= p) und der Linearfaktoren im Nenner (= $q + 1$; einer der Faktoren wird als $(j + 1)$ gesetzt) erklärt man die *verallgemeinerte hypergeometrische Funktion* durch

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_q \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = \sum_{j=0}^{\infty} A_j$$

wenn die Summanden A_j die Rekursion

$$\frac{A_{j+1}}{A_j} = \frac{(j + \alpha_1) \cdots (j + \alpha_p)}{(j + \beta_1) \cdots (j + \beta_q)} x \quad (88)$$

erfüllen und den Anfangswert $A_0 = 1$ haben. Hierbei liegt also die rationale Funktion $R(j)$ in vollständig faktorisierter Form vor.

Es stellt sich heraus, dass man die Koeffizienten hypergeometrischer Funktionen (als eindeutige Lösung einer einfachen Rekursion erster Ordnung mit einem Anfangswert) explizit angeben kann. Es ist

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_q \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_j \cdots (\alpha_p)_j}{(\beta_1)_j \cdots (\beta_q)_j} \frac{x^j}{j!},$$

wobei $(a)_j = a(a + 1) \cdots (a + j - 1)$ das sogenannte *Pochhammersymbol*²³ darstellt.

Beispiel 82 Betrachten wir das Termverhältnis (87), so sehen wir, dass im Falle der Funktionen $t_k^n(y)$ zunächst $p = 3$ und $q = 2$ sind. Weiter können wir direkt ablesen, dass $\alpha_1 = k + \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = -n + k$, $\alpha_3 = k + n + 2$, $\beta_1 = 2k + 1$, $\beta_2 = k + \frac{3}{2}$ und $x = y$ sind. Also ist wegen $t_k^n(0) = -\binom{k+n+1}{n-k}$ schließlich

$$t_k^n(y) = -\binom{k+n+1}{n-k} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n+k, k+\frac{1}{2}, k+n+2 \\ 2k+1, k+\frac{3}{2} \end{matrix} \middle| y \right). \quad (89)$$

Man beachte, dass die Tatsache, dass $-n + k \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ als oberer Parameter auftritt, automatisch bedeutet, dass die hypergeometrische Reihe abbricht und nur von $j = 0, \dots, n - k$ läuft. Dies schließt die Konversion gemäß (89) ab.

Hat man nun diese Standardisierung vorgenommen, so stellt sich natürlich die Frage, warum die in (89) auftretende hypergeometrische Funktion

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n+k, k+\frac{1}{2}, k+n+2 \\ 2k+1, k+\frac{3}{2} \end{matrix} \middle| y \right) \geq 0$$

sein sollte für $y \in (0, 1)$?

Es gibt einen Spezialfall, in welchem eine ${}_3F_2$ -Funktion sozusagen automatisch ≥ 0 ist. Dieser wird in folgendem Satz betrachtet.

Satz 83 (Clausensche Formel) Eine ${}_3F_2$ -Funktion ist genau dann das Quadrat einer ${}_2F_1$ -Funktion, wenn folgende Parameterkonstellation vorliegt:

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} 2a, 2b, a+b \\ a+b+\frac{1}{2}, 2a+2b \end{matrix} \middle| x \right) = \left({}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ a+b+\frac{1}{2} \end{matrix} \middle| x \right) \right)^2. \quad (90)$$

²³Engl.: shifted factorial

Beweis: Um diesen Satz zu beweisen, benutzt man folgende Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktion

Satz 84 (Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktion) *Die hypergeometrische Funktion*

$$F(x) := {}_pF_q \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_q \end{matrix} \middle| x \right)$$

ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$\theta(\theta + \beta_1 - 1) \cdots (\theta + \beta_q - 1)F(x) = x(\theta + \alpha_1) \cdots (\theta + \alpha_p)F(x),$$

wobei θ den Differentialoperator $\theta f(x) := x f'(x)$ bezeichne.

Beweis: Koeffizientenvergleich bei der angegebenen Differentialgleichung liefert die hypergeometrische Rekursion (88) und umgekehrt (Übungsaufgabe). $\square$

Nun können wir auch die Beweisidee von Satz 83 angeben. Die linke Funktion in (90) erfüllt eine Differentialgleichung dritter Ordnung. Auch die rechte Seite als Quadrat einer ${}_2F_1$ -Funktion erfüllt eine Differentialgleichung dritter Ordnung, welche man mithilfe der Produktregel finden kann. Ein Abgleich, wann diese beiden Differentialgleichungen übereinstimmen, liefert schließlich die angegebene Parameterkonstellation. $\square$

Askey und Gasper nutzen nun die Clausensche Formel in sehr geschickter Weise und gelangen schließlich zu der *Askey-Gasper-Identität*

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha + 2)_n}{n!} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n, n + \alpha + 2, \frac{\alpha+1}{2} \\ \alpha + 1, \frac{\alpha+3}{2} \end{matrix} \middle| x \right) = \\ & \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_j \left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)_{n-j} \left(\frac{\alpha+3}{2}\right)_{n-2j} (\alpha + 1)_{n-2j}}{j! \left(\frac{\alpha+3}{2}\right)_{n-j} \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_{n-2j} (n-2j)!} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 2j - n, n - 2j + \alpha + 1, \frac{\alpha+1}{2} \\ \alpha + 1, \frac{\alpha+2}{2} \end{matrix} \middle| x \right) = \\ & \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_j \left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)_{n-j} \left(\frac{\alpha+3}{2}\right)_{n-2j} (\alpha + 1)_{n-2j}}{j! \left(\frac{\alpha+3}{2}\right)_{n-j} \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_{n-2j} (n-2j)!} \left({}_2F_1 \left(\begin{matrix} j - \frac{n}{2}, \frac{n-2j+\alpha+1}{2} \\ \frac{\alpha+2}{2} \end{matrix} \middle| x \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Für $\alpha > -2$ ist die rechte – und damit auch die linke – Seite offenbar ≥ 0 . Im Spezialfall $\alpha = 2, 4, 6, \dots$ erhalten wir die Askey-Gasper-Ungleichung, wie sie im Beweis von de Branges benötigt wird. Heutzutage kann man die Askey-Gasper-Identität mit wenigen Computeralgebra-Berechnungen beweisen. Aber ihre geniale Herleitung lässt sich durch keine Computerberechnung ersetzen.

Literatur

- [1] Andrews, George, Askey, Richard und Roy, R.: *Special Functions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [2] Behnke, Heinrich und Sommer, Friedrich: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*. Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.
- [3] De Branges, L.: A proof of the Bieberbach conjecture. *Acta Math.* **154**, 1985, 137–152.
- [4] Dunford, N. und Schwartz, J. T.: *Linear Operators, Part I*. Wiley, New York, 1957.

- [5] Duren, Peter: *Univalent Functions*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, 1983.
- [6] FitzGerald, C. H. und Pommerenke, Ch.: The de Branges Theorem on univalent functions. Trans. Amer. Math. Soc. **290**, 1985, 683–690.
- [7] Hayman, Walter K.: *Multivalent Functions*. Second Edition, Cambridge University Press, 1994.
- [8] Heine, E.: *Handbuch der Kugelfunctionen*. Theorie und Anwendungen. Reimer, Berlin, 1878.
- [9] Henrici, Peter: *Applied and Computational Complex Analysis*. Band 3, Wiley, 1986.
- [10] Koepf, Wolfram: *On the interplay between geometrical and analytical properties of univalent functions*. Habilitationsschrift. Freie Universität Berlin, 1990.
- [11] Koepf, Wolfram: *Von der Bieberbachschen Vermutung zum Satz von de Branges sowie der Beweisvariante von Weinstein*. Jahrbuch Überblicke Mathematik 1994, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1994, 175–193.
- [12] Koepf, Wolfram: *Hypergeometric Summation*. Vieweg. Braunschweig/Wiesbaden, 1998.
- [13] Koepf, Wolfram: *Computeralgebra. Eine algorithmisch orientierte Einführung*. Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 2006.
- [14] Koepf, Wolfram: *Bieberbach conjecture, the de Branges and Weinstein functions, and the Askey-Gasper inequality*. International Workshop on Special Functions, Orthogonal Polynomials, Quantum Groups and Related Topics, Bexbach, Germany, 18-22 October 2003, The Ramanujan Journal, wird erscheinen.
- [15] Littlewood, John E.: *Lectures on the Theory of Functions*. Oxford University Press, 1944.
- [16] Phelps, R. R.: *Lectures on Choquet’s theorem*. Van Nostrand, Math. Studies **7**, Princeton, New Jersey, 1966.
- [17] Pommerenke, Christian: *Univalent Functions*. Vandenhoeck und Ruprecht, 1975.
- [18] Schober, Glenn: *Univalent Functions – Selected Topics*. Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1975.
- [19] Weinstein, L.: The Bieberbach conjecture. Internat. Math. Res. Notices **5**, 1991, 61–64.