Wolfram Koepf
Dirk Lange

14.04.2009

Übungen zur geometrischen Funktionentheorie

Blatt 1

Aufgabe 1:

(a) Beweisen Sie, dass unter den Voraussetzung des Schwarzschen Lemmas aus $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ oder $|f'(0)| = 1$ folgt, dass $f(z) = e^{i\theta}z$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$ ist.

(b) Sei f analytisch in $\mathbb{D}$ mit $|f(z)| \leq 1$ in $\mathbb{D}$. Dann ist

$$\left|\frac{f(z) - f(a)}{1 - \overline{f(a)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$$

in $\mathbb{D}$. Gleichheit gilt genau dann, wenn f ein Automorphismus ist.

(**Hinweis:** Betrachte $g = h_1 \circ f \circ h_2$ für geeignete Automorphismen h_1, h_2 und wende das Schwarzsche Lemma an.)

(c) Unter den Voraussetzungen von (b) gilt weiter

$$(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq 1 - |f(z)|^2$$

mit Gleichheit genau dann, wenn f ein Automorphismus ist.

(**Hinweis:** Wende die Ungleichung $|f'(0)| \leq 1$ aus dem Schwarzschen Lemma an.)

Die Teile (b) und (c) bilden das Lemma von Pick.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass eine lineare Transformation

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ mit } ad - bc \neq 0)$$

Kreislinien und Geraden auf Kreislinien und Geraden abbildet.

(**Hinweis:** Führen Sie die Aussage zurück auf die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$.)

Aufgabe 3:

1. Zeigen Sie: Die Funktion $H(z) = \frac{1+z}{1-z}$ bildet die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ bijektiv auf die rechte Halbebene $\mathbb{H} := \{z \mid z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$ ab.
2. Was ist das Bild von $\mathbb{D}$ unter der Koebefunktion $K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}(H(z)^2 - 1)$?

Abgabe: Donnerstag, 23.04.2009, in der Vorlesung.