Wolfram Koepf
Dirk Lange

23.06.2009

Übungen zur geometrischen Funktionentheorie

Blatt 10

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass sternförmige Funktionen $f \in St$ die Littlewood-Paley-Vermutung erfüllen.

Hinweis: Verwenden Sie Satz 41.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass für $f \in S$ die Ungleichung $|a_3 - a_2^2| \leqq 1$ gültig ist. Wann tritt Gleichheit ein?

Hinweis: Verwenden Sie den Flächensatz. Die Ungleichung lässt sich zwar auch mit der Löwnermethode beweisen, aber der Fall der Gleichheit lässt sich mit dieser Methode nicht so einfach untersuchen.

Aufgabe 3:

$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ sei die Koebefunktion. Zeigen Sie:

(a) Die Umkehrfunktion hat die Darstellung

$$K^{-1}(w) = \frac{1 + 2\,w - \sqrt{1 + 4\,w}}{2\,w} \ .$$

Die Funktion

$$\omega(z,t) := K^{-1}\Big(e^{-t} K(z)\Big) \quad (z \in \mathbb{D}, t \geq 0)$$

sei die beschränkte Löwnerkette der Koebefunktion. Zeigen Sie:

(b) $\omega(z,t) = \dfrac{-1 + (1+x)z - z^2 + (1-z)\sqrt{1 + z^2 - 2\,xz}}{z\,(x-1)}$, wobei $e^{-t} = \frac{1-x}{2}$.

(c) $\dot{\omega} = -\dfrac{1-\omega}{1+\omega}\,\omega$.

(c) $(z-1)z\omega'(z,t) = (z+1)\dot{\omega}(z,t)$.

(d) Stellen Sie $\omega(z,t)$ graphisch dar.

Abgabe: Donnerstag, 02.07.2009, vor der Vorlesung.