Wolfram Koepf
Dirk Lange 30.06.2009

Übungen zur geometrischen Funktionentheorie

Blatt 11

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass sternförmige Funktionen $f \in St$ die Milinsche Vermutung erfüllen.

Aufgabe 2:

Suchen Sie in der Literatur und in Computeralgebrasystemen: Welche Methoden zur exakten Bestimmung der Anzahl der reellen Nullstellen eines Polynoms in einem Intervall (a, b) gibt es?

Sei $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Anzahl der Nullstellen der Polynome $T_k^n(y)$ $(k = 1, \ldots, n)$ von de Branges $(y = e^{-t})$ im Intervall $y \in (0, 1)$

$$T_k^n(y) = k \sum_{j=k}^{n} (-1)^{k+j+1} \binom{2j}{j-k} \binom{n+j+1}{n-j} y^j = (\tau_k^n)'(t) \ .$$

Zeichnen Sie die Polynome für geeignete Werte von k und n.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass die Funktionen von de Branges

$$\tau_k^n(t) = k \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \frac{(2k+j+1)_j \, (2k+2j+2)_{n-k-j}}{(k+j)\, j!\, (n-k-j)!} \, e^{-(j+k)\,t} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

für $k = 1, \ldots, n$ die Eigenschaften (53)–(55) besitzen:

$$\tau_k^n(0) = n + 1 - k \ ,$$

$$\tau_k^n(t) - \tau_{k+1}^n(t) = -\frac{(\tau_k^n)'(t)}{k} - \frac{(\tau_{k+1}^n)'(t)}{k+1} \ ,$$

$$\lim_{t \to \infty} \tau_k^n(t) = 0 \ .$$

Zeigen Sie ferner die Darstellung der Ableitung

$$(\tau_k^n)'(t) = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{k+j+1} \binom{2j}{j-k} \binom{n+j+1}{n-j} \frac{e^{-jt}}{k} \ .$$

Abgabe: Donnerstag, 09.07.2009, vor der Vorlesung.