Wolfram Koepf
Dirk Lange 21.04.2009

Übungen zur geometrischen Funktionentheorie

Blatt 2

Aufgabe 1:

(a) Beweisen Sie, dass für alle analytischen Funktionen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$

$$\oint_{|\zeta|=1} \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta = 0$$

gilt.

Hinweis: $f(z)$ lässt sich in der kompakten Menge $\overline{\mathbb{D}}$ in eine gleichmäßig konvergente Potenzreihe entwickeln. Es reicht daher die Behauptung für $f(z) = z^n$ zu zeigen.

(b) Zeigen Sie für $z \in \mathbb{D}$:

$$f(z) + \overline{f(0)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta) + \overline{f(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta$$

Hinweis: Drücken Sie $f(z)$ und $\overline{f(0)}$ durch die Cauchysche Integalformel aus und verwenden Sie (a).

(c) Beweisen Sie die Schwarzsche Integralformel:

$$f(z) - i\mathrm{Im}f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{\mathrm{Re}f(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\zeta$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst mit Teil (b) $\mathrm{Re}f(0)$.

Aufgabe 2:

(a) Es sei $\tilde{B}$ die Familie der analytischen Funktionen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit $0 < |f(z)| \le 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Die Taylorreihe von f sei

$$f(z) = a_0(f) + a_1(f)z + a_2(f)z^2 + \dots\ .$$

Zeigen Sie, dass aus $a_0 = e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}^+$

$$f(z) \prec e^{-t\frac{1+z}{1-z}}$$

folgt.

Hinweis: Wenden Sie das Subordinationsprinzip auf $-\ln f(z)$ und $tH(z)$ an.

(b) Zeigen Sie:

$$A_1 := \max_{f \in \tilde{B}} |a_1(f)| = \frac{2}{e}$$

Für welche Funktionen $f(z)$ gilt Gleichheit?

Hinweis: Wenden Sie Teil (c) des Subordinationsprinzips mit den in (a) ermittelten Funktionen an. Um A_1 zu bestimmen, reicht es aus Funktionen mit $a_1(f) \in \mathbb{R}^+$ betrachten. Warum?

(c) Zeigen Sie:

$$A_2 := \max_{f \in \tilde{B}} |a_2(f)| = \frac{2}{e}$$

Hinweis: Wenden Sie Teil (d) des Subordinationsprinzips an.

(d) Zeigen Sie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(f)|^2 \le 1$$

Hinweis: Verwenden Sie die Parsevalsche Gleichung.

(e) Berechnen Sie die ersten 200 Koeffizienten der Taylorreihe von $e^{-\frac{1+z}{1-z}}$ und stellen Sie diese graphisch dar.

Abgabe: Donnerstag, 30.04.2009, in der Vorlesung.