Wolfram Koepf
Dirk Lange 30.04.2009

Übungen zur geometrischen Funktionentheorie

Blatt 3

Aufgabe 1:

Es bezeichne

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) , \qquad z \neq 0$$

die Joukowski-Funktion.

(a) Man bestimme die Bilder der Kreise $|z| = \text{const}$, sowie der Stahlen $\arg z = \text{const}$ unter der Abbildung f.

(b) Zeige: f ist auf dem Äußeren des Einheitskreises $|z| > 1$ injektiv.

(c) Zeige: f ist auf der oberen Halbebene $\operatorname{Im} z > 0$ injektiv.

(d) Bestimmen Sie zu (b) und (c) die Umkehrfunktionen.

Aufgabe 2: Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n : [0,1] \to [0,1]$ rekursiv durch $f_0(x) = x$ und

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & \text{falls } 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{falls } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x-2) & \text{falls } \frac{2}{3} < x \leq 1 \end{cases}$$

(a) Die f_n konvergieren in $[0,1]$ gleichmäßig. Der Grenzfunktion $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ heißt Cantorfunktion.

(b) f ist stetig und monoton wachsend.

(c) Außerhalb eine Nullmenge ist f differenzierbar mit Ableitung 0.

(d) f ist die eindeutig bestimmte Lösung der folgenden Funktionalgleichung.

  (1) f ist in $[0,1]$ monoton wachsend.
  (2) $f(0) = 0$.
  (3) $f(x/3) = f(x)/2$
  (4) $f(1-x) = 1 - f(x)$

(e) Zeichnen Sie f.

Abgabe: Donnerstag, 07.05.2009, in der Vorlesung.