Übungen zur geometrischen Funktionentheorie

Blatt 4

Es bezeichne

$$S := \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(0) = 0, f'(0) = 1, f \text{ ist analytisch und injektiv}\}$$

die Klasse der schlichten Funktionen.

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen in S liegen und geben Sie jeweils $f(\mathbb{D})$ an.

(a) $f(z) = z$

(b) $f(z) = z(1 - z)^{-1}$

(c) $f(z) = z(1 - z^2)^{-1}$

(d) $f(z) = \frac{1}{2} \ln[(1 + z)/(1 - z)]$

Aufgabe 2:

Es sei $f \in S$. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen auch in S liegen.

(a) $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$

(b) Für $|\alpha| < 1$

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right) - f(\alpha)}{(1 - |\alpha|^2)f'(\alpha)}$$

(c) $g(z) = \sqrt[m]{f(z^m)}$ für $m \in \mathbb{N}$

(d) $g(z) = \omega f(z)/(\omega - f(z))$ wobei $f(z) \neq \omega$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

Geben Sie für die Teile (a)-(c) jeweils an, durch welche geometrische Operation $g(\mathbb{D})$ aus $f(\mathbb{D})$ hervorgeht.

Abgabe: Mittwoch, 14.05.2009, in der Vorlesung.