

Übungen zur geometrischen Funktionentheorie

Blatt 5

Aufgabe 1:

1. Zeigen Sie:

$$f_\theta(z) = \frac{z}{1 - e^{i\theta}z}$$

ist konvex.

2. Für $\theta \neq \varphi$ und $t \in (0, 1)$ ist

$$g(z) = tf_\theta(z) + (1 - t)f_\varphi(z)$$

nicht konvex.

Aufgabe 2:

Sei f eine schlichte Funktion.

1. Sei $|z| = r$. Zeigen Sie $zf'(z)$ ist die Normale auf $\partial f(\mathbb{D}_r)$.
2. Es gilt $\frac{zf'}{f} \in P$ genau dann, wenn $|\arg zf' - \arg f| < \frac{\pi}{2}$ gilt.
3. Deuten Sie $|\arg zf' - \arg f| < \frac{\pi}{2}$ geometrisch.

Aufgabe 3:

- (a) $f(\mathbb{D})$ ist genau dann konvex, wenn $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D}) = \bigcup \text{Halbebenen}$.
- (b) $f(\mathbb{D})$ ist genau dann sternförmig bezüglich 0, wenn $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D}) = \bigcup \text{radialen Halbstrahlen}$.

Aufgabe 4:

Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

- (a) Zeigen Sie aus $|a_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$|f^{(n)}(re^{i\theta})| \leq n! \frac{1}{(1-r)^{n+1}}$$

für $0 \leq r < 1$ und $\theta \in \mathbb{R}$.

- (b) Aus $|a_n| \leq n$ folgt

$$|f^{(n)}(re^{i\theta})| \leq K^{(n)}(r)$$

für $0 \leq r < 1$ und $\theta \in \mathbb{R}$.

Abgabe: Donnerstag, 21.05.2009, vor der Vorlesung