Wolfram Koepf
Dirk Lange 19.05.2009

Übungen zur geometrischen Funktionentheorie

Blatt 6

Aufgabe 1: Es sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\phi(t + 2\pi) = \phi(t) + 2\pi$ und

$$\phi(t_2) - \phi(t_1) > -\pi \text{ für } t_1 < t_2 \ .$$

Dann gibt es eine stetige, monoton wachsende Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\psi(t + 2\pi) = \psi(t) + 2\pi$ und $|\phi(t) - \psi(t)| \leq \pi/2$.

Hinweis: Betrachte $\psi(t) := \max_{s \leq t} \phi(s) - \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie:

Für die abgeschlossene konvexe Hülle von St und ihre Extrempunkte gilt

$$\overline{co}St = \left\{ f \in A \middle| f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{z}{(1 - e^{it}z)^2} d\mu(t), \mu \text{ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß} \right\}$$

$$E\overline{co}St = \left\{ \frac{z}{(1 - e^{it}z)^2} \middle| t \in [0, 2\pi] \right\}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Alexander, um die aus der Vorlesung bekannten Aussagen über konvexe Funktionen auf sternförmige Funktionen zu übertragen.

Aufgabe 3:

Es sei $p : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analytisch mit $p(z) = e^{i\alpha} + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots$ und $\operatorname{Re} p(z) > 0$.

Zeigen Sie:

$$|p_n| \leq 2 \cos \alpha$$

Abgabe: Donnerstag, 28.05.2009, vor der Vorlesung.