Wolfram Koepf
Dirk Lange

02.06.2009

Übungen zur geometrischen Funktionentheorie

Blatt 8

Aufgabe 1:

Es sei $f(z) = z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \ldots$ eine schlichte, ungerade Funktion. Zeigen Sie:

$$|a_3| \leq 1$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $f(z) = z(1 - e^{i\theta} z^2)^{-1}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Für $\theta = 0$ erhält man mit $f(z) = z(1 - z^2)^{-1}$ die Quadratwurzeltransformation der Koebefunktion.

Aufgabe 2:

Beweisen Sie das Schwarzsche Spiegelungsprinzip:

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet in der oberen Halbebene und sei $I \subset \partial D$ ein Intervall auf der reellen Achse. Die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ sei analytisch in D, stetig in $D \cup I$ und habe in I nur reelle Werte. Dann kann man f in eindeutiger Weise analytisch fortsetzen auf das Gebiet $\overline{D}$, welches durch Spiegelung von D an der reellen Achse entsteht. Die Funktion f ist dann analytisch in $D \cup I \cup \overline{D}$.

Aufgabe 3:

Die Spiegelung am Kreis wird algebraisch durch $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ definiert. Man kann Sie jedoch auch rein geometrisch einführen. Beschreiben Sie wie man mit Zirkel und Lineal zu einem Punkt P den Bildpunkt P' konstruieren kann.

Aufgabe 4:

Die Riemannsche Zahlenkugel ist eine Darstellung der kompaktifizierten der komplexen Ebene. Dabei wird dem Punkt $(0, 0, 1)$ der Einheitskugel der Wert ∞ zugeordnet, während die anderen Punkte gemäß

$$(\sin\phi \sin\theta, \sin\phi \cos\theta, \cos\phi) \mapsto \tan\frac{\phi}{2}(\sin\theta + i\cos\theta)$$

komplexe Zahlen repräsentieren.

Was bedeutet geometrisch die Inversion am Einheitskreis auf der Riemannsche Zahlenkugel?

Abgabe: Freitag, 12.06.2009, vor der Übung.