Wolfram Koepf
Dirk Lange

09.06.2009

Übungen zur geometrischen Funktionentheorie

Blatt 9

Aufgabe 1:

Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, die eine Schwarz-Christoffel-Formel

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{2\mu_k}{z - z_k}$$

mit $z_k \in \partial\mathbb{D}$ und $\mu_k \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Zeigen Sie:

(a) f stetig fortsetzbar bei $z_k \iff \mu_k < \frac{1}{2}$

(b) f schlicht $\Rightarrow \mu_k \geq -\frac{1}{2}$ für alle $k = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 2:

Es sei

$$\tilde{P} = \left\{ p \in A \mid p(0) = 1, \exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall z \in \mathbb{D} : \operatorname{Re} e^{i\alpha} p(z) > 0 \right\} .$$

Zeigen Sie:

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{1 + c x_k z}{1 - x_k z} \middle| n \in \mathbb{N}, \mu_k > 0, \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1, |c| = 1, |x_k| = 1 \right\} \tag{*}$$

ist eine dichte Teilmenge von $\tilde{P}$.

Hinweis: Aus der Riesz-Herglotz-Darstellung folgt eine ähnliche Aussage für P.

Aufgabe 3:

Jede Funktion aus $(*)$ hat eine Darstellung der Form

$$p(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1 - y_k z}{1 - x_k z}$$

wobei

$$|y_k| = |x_k| = 1$$

ist und diese Zahlen sich auf der Einheitskreislinie immer abwechseln, d.h.

$$\arg x_1 < \arg y_1 < \arg x_2 < \arg y_2 < \ldots < \arg x_n < \arg y_n < \arg x_1 + 2\pi$$

Aufgabe 4:

Zeigen Sie: Die Funktionen $p(z)$ aus Aufgabe 3 liegen alle in $\tilde{P}$.

Abgabe: Donnerstag, 18.06.2009, vor der Vorlesung.