WS 2003/2004 **Lineare Algebra I**

Prof. Dr. Wolfram Koepf

Name:	
Vorname:	
Matr.-Nr.:	
Studiengang:	

16. Februar 2004

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
Punkte							

1. (*10 Punkte*) Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Für jede richtige Entscheidung gibt es einen Punkt, für jede falsche Entscheidung wird ein Punkt abgezogen, jedoch werden insgesamt nicht weniger als 0 Punkte vergeben. Kreuzen Sie direkt auf dem Aufgabenzettel an.

		richtig	falsch
1	Für endlichdimensionale Untervektorräume $V_1, \ldots V_n$ gilt stets $\dim(V_1 + \ldots + V_n) = \dim(V_1) + \ldots + \dim(V_n)$.	☐	☐
2	Ein Ring ohne Nullteiler muß kein Körper sein.	☐	☐
3	Es gibt keine injektive lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ falls $n > m$.	☐	☐
4	Es gibt bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen der Ordnung 4.	☐	☐
5	Die Menge der reellen Polynome vom Grad 4 bildet einen $\mathbb{R}$–Vektorraum.	☐	☐
6	Im $\mathbb{R}^4$ können sich zwei Ebenen in einem Punkt schneiden.	☐	☐
7	Für alle $n \times n$–Matrizen A, B gilt $AB = BA$.	☐	☐
8	Der Vektorraum K^2 mit $K = {}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}$ hat vier Elemente.	☐	☐
9	Haben zwei lineare Abbildungen $f, g : V \to W$ den selben Kern und das selbe Bild, so folgt daraus nicht $f = g$.	☐	☐
10	Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Dann ist $\det(A) = 0$ genau dann, wenn A den Rang n hat.	☐	☐

2. (*12 Punkte*) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 12 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

stellt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der kanonischen Basen dar.

(a) Finden Sie Basen für das Bild und den Kern von f.

(b) Bestimmen Sie für $b = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 31 \end{pmatrix}$ die Urbildmenge $f^{-1}(b)$.

3. (*6 Punkte*) Fassen sie $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$–Vektorraum auf und zeigen Sie für $a \in \mathbb{R}$:
$\{1, a\}$ ist genau dann linear abhängig, wenn a rational ist.

4. (*6 Punkte*) Bestimmen Sie die Dimension des folgenden Untervektorraumes von $\mathbb{R}^4$:

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_4 = x_1 + 1000x_2, x_3 = x_2 - x_1 \right\}.$$

5. (*8 Punkte*) Man stelle fest, welche der gegebenen Matrizen invertierbar sind, und bestimme gegebenenfalls die inverse Matrix:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Q}), a \in \mathbb{Q}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Z})$

6. (*8 Punkte*) Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \dots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & \dots & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{genauer: } a_{ij} = \begin{cases} 1 & & i = j \\ 2 & \text{falls} & i = n+1-j \\ 0 & & \text{sonst} \end{cases}.$$

Berechnen Sie $\det A$.

7. (*12 Punkte*) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 3 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(c) Wenn Sie in (7b) richtig gerechnet haben, sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_4 = 4$ herausgekommen.
Bestimmen Sie zu jedem dieser Eigenwerte einen Eigenvektor.

Musterlösungen

1. Multiple choice:

		richtig	falsch
1	Gegenbeispiel $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^3$.	☐	☒
2	Beispiel: $\mathbb{Z}$	☒	☐
3	Der Kern kann nach dem Dimensionssatz nicht Null sein!	☒	☐
4	Wurde in der Vorlesung gezeigt.	☒	☐
5	Nicht abgeschlossen: $(X^4) + (-X^4) = 0$ hat Grad < 4.	☐	☒
6	Beispiel sind e_i Basisvektoren des $\mathbb{R}^4$ dann folgt aus der Unabhängigkeit $E1 : \lambda_1 e_1 + \mu_1 e_2 \cap E2 : \lambda_2 e_3 + \mu_2 e_4 = \{0\}$	☒	☐
7	Gegenbeispiel $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.	☐	☒
8	Ja, und zwar modulo 2: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.	☒	☐
9	Ja, etwa $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x, g(x) = 2x$ haben beide Kern 0 und Bild $\mathbb{R}$, sind aber verschieden.	☒	☐
10	Nein, Hat A den Rang n, so ist dieser Rang maximal, A ist umkehrbar, also $\det A$ invertierbar, also $\det A \neq 0$	☐	☒

2. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 12 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

stellt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der kanonischen Basen dar.

(a) Finden von Basen für das Bild und den Kern von f:

i. Basis des Bildes: Das Bild wird von den Spaltenvektoren der Matrix aufgespannt. Durch elementare Spaltenumformungen wird A in (spalten-)Stufenform gebracht (analog kann man die Transponierte mit Zeilenumformungen bearbeiten).

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 12 & 5 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & -3 & -9 \\ -2 & 18 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & -3 & -9 \\ -2 & 18 & 9 & 27 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \\ -2 & 18 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Im Schritt 1: II-3*I→ II, III-2*I→ III, IV-6*I→IV
Im Schritt 2: 2*III-II→ III, 2*IV-6*II→IV
Nun ist Stufenform erreicht, und die auftauchenden nichtverschwindenden Spalten sind linear unabhängig und erzeugen das Bild. Damit bilden die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}$ eine Basis für das Bild.

ii. Basis des Kernes: mit dem Gauß-Algorithmus wird das zu A gehörige homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ gelöst:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 12 & 5 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -6 & -3 & -9 \\ 0 & 18 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -6 & -3 & -9 \\ 0 & 18 & 9 & 27 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Im Schritt 1: II-2*I→ II, III+2*I→ III
Im Schritt 2: III+3*II→ III, -$\frac{1}{3}$*II→II
Die dritte Zeile führt zu einer stets erfüllten Gleichung. $x_3 = \mu', x_4 = \lambda'$ sind frei wählbar, und aus der zweiten bzw. ersten Zeile erhalten wir $x_2 = -\frac{1}{2}(\mu' + 3\lambda')$ und $x_1 = -(2\mu' + 6\lambda' + 3x_2) = -(\frac{1}{2}\mu' + \frac{3}{2}\lambda')$ oder vektoriell geschrieben und mit $\mu = -2\mu', \lambda = -2\lambda'$: $x = \begin{pmatrix} 1\mu + 3\lambda \\ \mu + 3\lambda \\ -2\mu \\ -2\lambda \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ Damit haben wir $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ als Basis des Kerns bestimmt.

(b) Bestimmen Sie für $b = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 31 \end{pmatrix}$ die Urbildmenge $f^{-1}(b)$. Hierzu führe ich die Eliminationsschritte der vorherigen Aufgabe zusätzlich auf dem Spaltenvektor b aus:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 31 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 7 \\ -17 \\ 45 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 7 \\ \frac{17}{3} \\ -6 \end{pmatrix}$$

Da hier die dritte Zeile nicht verschwindet, ist die Lösungsmenge leer.

3. Gegeben: $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$–Vektorraum, zu zeigen: $\{1, a\}$ ist genau dann linear abhängig, wenn a rational ist.

   Beweis: Ist a rational, so gibt es $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ mit $a = \frac{p}{q}$, es folgt $(-p) \cdot 1 + a \cdot q = 0$ und $\{1, a\}$ ist linear abhängig. Ist umgekehrt $\{1, a\}$ linear abhängig, so gibt es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$, nicht beide 0, mit $\lambda_1 + a\lambda_2 = 0$. Es kann dann nicht $\lambda_2 = 0$ sein, weil sofort $\lambda_1 = 0$ folgte. Also ist $a = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}$.

4. Gesucht ist die Dimension des folgenden Untervektorraumes von $\mathbb{R}^4$:

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_4 = x_1 + 1000x_2, x_3 = x_2 - x_1 \right\}.$$

   Dies ist die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystemes $Ax = 0$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1000 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. A ist bereits in Zeilenstufenform. Damit ist A vom Rang 2, und die Dimension des Kernes M ist nach dem Dimensionssatz $4 - 2 = 2$.
   (Konkret konstruiert: $x_1 = \lambda, x_2 = \mu$ sind frei wählbar und wir lesen $x_4 = x_1 + 1000x_2, x_3 = x_2 - x_1$ direkt aus der Mengendarstellung ab. Es ergibt sich $x = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \lambda + 1000\mu \\ -\lambda + \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} +$

$\mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1000 \\ 1 \end{pmatrix}$ Damit haben wir zwei linear unabhängige (wie man bereits an den ersten zwei Zeilen sieht) Erzeuger der Lösungsmenge, und M hat die Dimension 2.)

5. Mit der Gaußmethode zu Bestimmung der Inversen in beiden Fällen:

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & a-1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & a-1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & a-1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & a-1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^*} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1+\frac{1}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-1} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{a-1} & 0 & \frac{1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Im Schritt 1: II-I→ II, III-I→ III
Im Schritt 2: II↔ III
Im Schritt 3: Hier wird $a \neq 1$ gefordert! für $a = 1$ existiert keine Inverse, da dann offenbar dreimal die selbe Zeile dasteht, also $\det A = 0$ gilt.
dividieren: $\frac{a}{a-1}$II→ II, $\frac{1}{a-1}$III→ III
Im Schritt 4: I-II→ I. Im Schritt 5: II-III→ II.

Ergebnis: Eine Inverse existiert für $a \neq 1$, sie ist dann gleich $\begin{pmatrix} \frac{a}{a-1} & 0 & -\frac{1}{a-1} \\ 0 & -\frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} \\ -\frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & 0 \end{pmatrix}$.

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Schritt 1: II-3I→ II, Schritt2: I+II→ I, Schritt 3: $-$II/2→ II.

Die Inverse ist also: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

6. Gesucht ist $\det A$ für n gerade und $A = (a_{ij})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \dots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & \dots & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{genauer: } a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 2 \quad \text{falls} & i = n+1-j\,. \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Um die Determinante zu finden, kann man hier mit dem Gauß-Algorithmus A auf Dreiecksgestalt bringen. Dabei ist für die Zeilen 1 bis $\frac{n}{2}$ gar keine Zeilenoperation nötig: diese Hälfte der Matrix ist schon in Dreiecksgestalt.

Es sind noch die Einträge "2" unterhalb der Diagonalen zu eliminieren, wobei offenbar je eine "1" aus dem oberen Bereich (in Zeile $k <= \frac{n}{2}$) genau eine darunterliegende "2" (in Zeile $n+1-k$) eliminiert (durch die Operation $(n+1-k) \leftarrow (n+1-k) - 2(k)$).

Dabei steht genau über der "1" in der Zeile $(n+1-k)$ ebenfalls in der eliminierenden Zeile k jeweils eine "2", so daß nach der Elimination in Spalte $(n+1-k)$ der Zeile $(n+1-k)$ gerade $1 - 2 * 2 = -3$ steht. Also führt die Gaußelimination schließlich zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \dots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \dots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \dots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Womit A auf eine Dreiecksgestalt gebracht ist, wobei $\frac{n}{2}$ Einsen und $\frac{n}{2}$ mal die Zahl -3 in der Diagonale auftaucht. Daher ist $\det A = (-3)^{\frac{n}{2}}$.

7. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 3 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$.

(a) Das charakteristische Polynom von A ist $\left|A - \lambda E\right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ -3 & 6-\lambda & 3 \\ 4 & -4 & -\lambda \end{vmatrix}$

Die Regel von Sarrus ergibt die Determinante $\left|A - \lambda E\right| =$
$(1-\lambda)(6-\lambda)(-\lambda) + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3(-3)(-4) - (1-\lambda)3(-4) - (6-\lambda)3 \cdot 4 - (-\lambda)(-3)2 =$
$(1-\lambda)(6-\lambda)(-\lambda) + 24 + 36 + 12 - 12\lambda - 72 + 12\lambda - 6\lambda = (1-\lambda)(6-\lambda)(-\lambda) - 6\lambda =$
$-\lambda((1-\lambda)(6-\lambda) + 6) = -\lambda(12 - 7\lambda + \lambda^2)$
Damit ist das charakteristische Polynom also $-\lambda(\lambda^2 - 7\lambda + 12)$.

(b) Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynomes. Es ist $-\lambda(\lambda^2 - 7\lambda + 12) = 0$, wenn entweder $\lambda = 0$ oder $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$ gilt. Damit ist also ein Eigenwert $\lambda_1 = 0$, die beiden weiteren Eigenwerte bestimmen sich nach der "pq-Formel" zu $\lambda_{2,3} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$ also $\lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$.

(c) Bestimmen von Eigenvektoren: Zu finden ist zu jedem der Eigenvektoren eine nichttriviale Lösung v der homogenen Gleichung $(A - \lambda_i E)v = 0$.

$\lambda = 0$: Gaußumformung ergibt:

$$(A - 0E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 3 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 12 & 12 \\ 0 & -12 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: II $\leftarrow$ II-3*I, III $\leftarrow$ III-4*I,
Schritt 2: III $\leftarrow$ III-II, II $\leftarrow -\frac{1}{12}$II
Aus der Zeilenstufenform sehen wir, daß v_3 beliebig ist, also setzen wir $v_3 = 1$, mit Rückeinsetzen erhalten wir $v_2 = -1, v_1 = 2 - 3 = -1$ und damit den Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu $\lambda_1 = 0$.

$\lambda = 3$: Gaußumformung ergibt:

$$(A - 3E) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: II $\leftarrow$ 2*II-3*I, III $\leftarrow$ III+2*I,
Schritt 2: I $\leftarrow$ I+II,III $\leftarrow$ III+II.
Hier ergibt sich aus der zweiten Zeile $v_3 = 0$. Es ist v_2 beliebig. Wir wählen $v_2 = 1$. Aus der ersten Zeile ergibt sich $v_1 = 1$ und wir erhalten den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu $\lambda_1 = 3$.

$\lambda = 4$: $(A - 4E) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ Hier sieht man sofort, daß die erste Spalte gerade das Negative der letzten Spalte ist, damit ist $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung von $(A - 4E)v = 0$ und somit Eigenvektor zum Eigenwert 4 von A.