11.1.9 Beispiel $n = 2$ Die Hyperflächen einer euklidischen Ebene heißen *Kegelschnitte.* Wir können sie wie folgt konstruieren, vgl. Abb. 11.1.1: Wir nehmen einen Kreis $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ und einen Punkt $p_0 \in \mathbb{R}^3$, der nicht in der $\mathcal{C}$ enthaltenden Ebene liegt. Dann heißt die Menge $\mathcal{K}$ der Punkte, die auf einer Geraden durch p_0 und einen Punkt $q \in \mathcal{C}$ liegen, *(Doppel-)Kegel.* Durch Einführen geeigneter euklidischer Koordinaten können wir $\mathcal{K}$ beschreiben durch

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{p_0x} = \lambda(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 1);\ \lambda \in \mathbb{R},\ r > 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi\}.$$

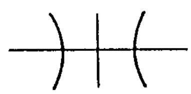
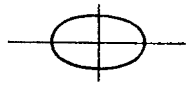
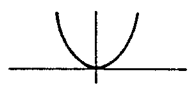
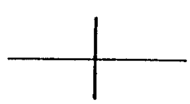
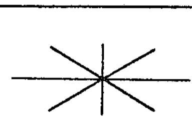
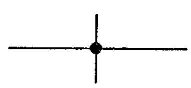
Typ	(r,d)	Gleichung	Bezeichnung	Bild
I	$(1,0)$	$-\frac{x_1^2}{c_1^2} = 1$	leere Menge	
I	$(1,1)$	$\frac{x_1^2}{c_1^2} = 1 \quad x_1 = \pm c_1$	2 parallele Geraden	
I	$(2,0)$	$-\frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} = 1$	leere Menge	
I	$(2,1)$	$\frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} = 1$	Hyperbel	
I	$(2,2)$	$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} = 1$	Ellipse (Kreis für $c_1 = c_2$)	
II	$(1,1)$	$\frac{x_1^2}{c_1^2} = -x_2$	Parabel	
III	$(1,1)$	$\frac{x_1^2}{c_1^2} = 0 \iff x_1 = 0$	Gerade	
III	$(2,1)$	$\frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} = 0 \iff$ $c_2x_1 = \pm c_1x_2$	2 sich schneidende Geraden	
III	$(2,2)$	$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} = 0 \iff$ $x_1 = x_2 = 0$	ein Punkt	

Tabelle der Kegelschnitte — 11.1.1

Die Kegelschnitte entstehen, indem $\mathcal{K}$ mit einer Ebene geschnitten wird. Die Normalformen der Kegelschnitte gemäß 11.1.8 sind in Tabelle 11.1.1 beigefügt. Das ist unser früheres Resultat aus 1.1.7.

11.1.10 Beispiel $n = 3$ Die Hyperflächen eines 3-dimensionalen euklidischen Raumes heißen *Flächen* 2. *Ordnung.* Auf einige ihrer geometrischen Eigenschaften gehen wir später ein. Zunächst stellen wir sie geordnet nach (Typ, r,d) in Tabelle 11.1.2 zusammen.

(I,1,0) $\quad -\frac{x_1^2}{c_1^2} = 1$

leere Menge.

(I,1,1) $\quad \frac{x_1^2}{c_1^2} = 1 \iff x_1 = \pm c_1$

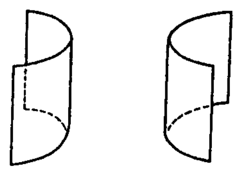
parallele Ebenen.

(I,2,0) $\quad -\frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} = 1$

leere Menge.

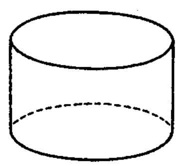
(I,2,1) $\quad \frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} = 1$

Hyperbelzylinder
(unendlicher Zylinder, entsteht durch Verschieben einer Hyperbel längs einer zu ihrer Ebene senkrechten Geraden. Analog bei den folgenden Zylindern).



(I,2,2) $\quad \frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} = 1$

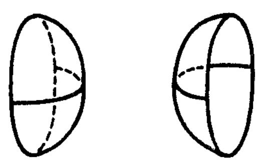
Ellipsenzylinder
(Kreiszylinder für $c_1 = x_2$).



(I,3,0) $\quad -\frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} - \frac{x_3^2}{c_3^2} = 1$ leere Menge.

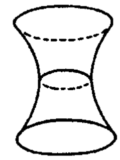
(I,3,1) $\quad \frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} - \frac{x_3^2}{c_3^2} = 1$

zweischaliges Hyperboloid
(entsteht im Fall $c_2 = c_3$ durch Rotation einer Hyperbel).



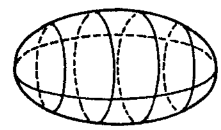
(I,3,2) $\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} - \frac{x_3^2}{c_3^2} = 1$

einschaliges Hyperboloid
(entsteht im Fall $c_1 = c_2$
durch Rotation einer Hyperbel).



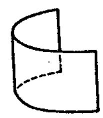
(I,3,3) $\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} = 1$

Ellipsoid
(2-dim. Sphäre im Fall $c_1 = c_2 = c_3$).



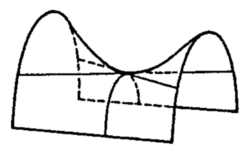
(II,1,1) $\frac{x_1^2}{c_1^2} = -x_2$

Parabelzylinder.



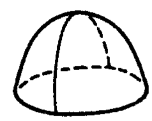
(II,2,1) $\frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} = -x_3$

hyperbolisches Paraboloid (Sattelfläche).



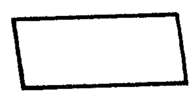
(II,2,2) $\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} = -x_3$

elliptisches Paraboloid.



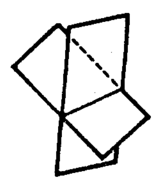
(III,1,1) $\frac{x_1^2}{c_1^2} = 0 \iff x_1 = 0$

Ebene.



(III,2,1) $\frac{x_1^2}{c_1^2} - \frac{x_2^2}{c_2^2} = 0 \iff c_2 x_1 \pm c_1 x_2 = 0$

2 *sich schneidende Ebenen.*

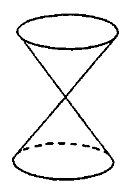


(III,2,2) $\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} = 0 \iff x_1 = x_2 = 0$

Gerade.

(III,3,2) $\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} - \frac{x_3^2}{c_3^2} = 0$

Doppelkegel.



(III,3,3) $\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} = 0$

1 *Punkt.*

Tabelle 11.1.2