UNI KASSEL VERSITÄT
Prof. Wolfram Koepf
Peter Horn

Übungen Lineare Algebra II

SS 2004
24.05.04

Blatt 5

Aufgabe 1 (Geometrie in $\mathbb{R}^2$): In dieser Aufgabe wollen wir uns mit Drehungen und Spiegelungen im $\mathbb{R}^2$ befassen. Seien $\varphi \in [0, 2\pi[$ und

$$U_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad A_1 := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Was bewirken U_φ, A_1, A_2, A_3 bei Linksmultiplikation an einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ geometrisch? (und warum?) [3]

b. Wie kann aus Matrizen der Form U_φ und A_1 eine Spiegelung an einer beliebigen Geraden zusammengesetzt werden? [2]

c. Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$. Bestimme $\lambda \in \mathbb{R}$, $w' \in \mathbb{R}^2$ so, dass $v - \lambda w'$ die Spiegelung von v an der von w aufgespannten Geraden ist. [2]

d. Seien $v = (-2, 3)^T$ und $w = (1, 4)^T$. Spiegele v an der von w aufgespannten Geraden und umgekehrt mit den Verfahren aus (b) und (c). [3]

[10]

Aufgabe 2 (Orthogonalisierung): Sei $A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a. Benutze das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren, um die Spalten von A zu orthonormalisieren. [4]

b. Die Matrix mit den orthonormalisierten Spalten aus (a) heiße B. Invertiere B. [4]

[8]

Aufgabe 3 (QR-Zerlegung): Sei $V = \mathbb{R}^n$. Wir definieren für $1 \le k < l \le n$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$ die Matrix

$$U(k,l,\varphi) := (u_{i,j})_{1\le i,j\le n} \quad \text{mit} \quad u_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \wedge i \neq k \wedge i \neq l, \\ \cos\varphi & \text{falls } i = j = k \vee i = j = l \\ -\sin\varphi & \text{falls } i = k \wedge j = l, \\ \sin\varphi & \text{falls } i = l \wedge j = k, \\ 0 & \mathit{sonst}. \end{cases}.$$

a. Zeige: $U(k,l,\varphi)$ ist orthogonal. [2]

b. Was bewirkt die Anwendung der Matrix $U := U(k,l,\varphi)$ auf eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$? Was heißt das geometrisch? [4]

c. Wie kann ein $\varphi \in [0, 2\pi[$ bestimmt werden, so dass für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $a\sin\varphi + b\cos\varphi = 0$? [2]

d. Zeige: Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt es eine orthogonale Matrix $Q \in O(n)$ und eine rechte-obere-Dreiecksmatrix R mit $A = QR$. [4]

[12]

Abgabe bis 31. Mai 2004 11:00h in den Kästen im zweiten Stock.

[30]