

Einsatz von CAS in der Hochschulmathematik

WOLFRAM KOEPF: Kassel

1 Entwicklung von Computeralgebrasystemen

Beginnen möchte ich meinen Artikel mit einem kurzen historischen Überblick über die Entstehung von Computeralgebrasystemen (CAS):

- **1968** Reduce (Tony Hearn, LISP, Public Domain seit 2009) (Reduce 2009)
- **1970** Scratchpad (IBM, LISP)
- **1971** Macsyma (MIT, LISP, Public Domain als Maxima seit 1998) (Maxima 1998)
- **1978** muMATH (David Stoutemyer, PC-System, LISP)
- **1980** Maple (University Waterloo, C) (Maple 2014)
- **1988** Mathematica (Stephen Wolfram, C) (Mathematica 2014)
- **1989** Derive (Nachfolger von muMATH, Vertrieb eingestellt 2007)
- **1990** MuPAD (Universität Paderborn, C, zuletzt entwickelte Version 2008, wird nur noch als Symbolic Math Toolbox von Matlab weiterentwickelt) (Matlab 2014)
- **1992** Axiom (Nachfolger von Scratchpad, NAG, LISP, Public Domain seit 2002) (Axiom 2002)

General-Purpose-CAS wurden parallel zu Programmiersprachen wie Fortran, LISP, Algol, Pascal, C, ... entwickelt. Die ersten Systeme waren Reduce, Scratchpad und Macsyma. Sie waren nur auf Großrechnern (mainframes) verfügbar, entsprechend eingeschränkt war die Benutzer-Community. Als Erfinder des „kleinen Systems“ für den PC darf David Stoutemyer gelten, der mit muMATH das erste PC-System entwarf, das wirklich nur minimalen Speicher benötigte, dafür aber auch (noch) nicht besonders mächtig war. Das weit mächtigere System Maple, das bis heute weiterentwickelt und vermarktet wird, konnte zunächst auch nicht auf den IBM-PC, der 1981 auf den Markt kam, portiert werden. Hingegen wurde Reduce an den IBM-PC angepasst und lief innerhalb der dama-

ligen 640 kB-Speichergrenze. Allerdings konnte man allzu umfangreiche Aufgaben mit so wenig Speicherplatz nicht lösen.

Als Microsoft dann aber um das Jahr 1988 herum die Speichergrenze von 640 kB für seine MS-DOS-Betriebssysteme überwand und Windows entstand, war der Bann gebrochen. Mathematica, das 1988 auf den Markt kam, war das erste große PC-System. Da Mathematica außerdem als erstes System Symbolik, Numerik und Grafik in einem Programm zusammenführte, konnte Mathematica sofort große Marktanteile erobern und ist bis heute Marktführer geblieben. Fast gleichzeitig kam Derive, der Nachfolger von muMATH, auf den Markt. Derive war wieder ein kleines System, das problemlos auf eine 360 kB-Diskette passte (!), aber viel mächtiger war als sein Vorgänger. Es eignete sich sehr gut für den schulischen Einsatz und konnte sich dort auch vielerorts durchsetzen. David Stoutemyer und Al Rich portierten Derive dann sogar auf den Handheld TI-92 und verkauften Derive an Texas Instruments. Dies führte schließlich dazu, dass im Jahr 2003 die letzte Derive-Version 6 auf den Markt kam und die Weiterentwicklung als Computerprogramm dann 2007 eingestellt wurde. Seit 2009 gibt es nur noch die beiden General-Purpose-Systeme Maple und Mathematica, die kommerziell weiterentwickelt werden, alle anderen Systeme sind entweder vom Markt verschwunden (Derive und MuPAD) oder wurden ins Public Domain gestellt und können nun als freie Systeme verwendet werden (Axiom, Maxima und Reduce).

2 Computeralgebra für die Anfängervorlesungen

Seit es CAS auf PC-Basis gab, gab es auch Versuche, diese in der mathematischen Hochschullehre einzusetzen. Ich möchte hier gerne anhand meiner eigenen Biographie über einige Erfahrungen berichten. Im Jahr 1990 erhielt ich ein Feodor-Lynen-Stipendium der Alexander von Humboldt-Stiftung. Im Rahmen dieses Stipendiums konnte ich einen Forschungsaufenthalt in den USA durchführen und wollte mir dort überlegen, wie Computeralgebra als didaktisches Hilfsmittel in den Anfänger-Vorlesungen der Analysis eingesetzt werden kann. Zusammen mit meinen amerikanischen Kollegen Bob Gilbert und Adi Ben-Israel entschieden wir uns, hierfür Derive einzusetzen. Uns gefiel das einfache Interface und die daraus resultierende leichte Bedienbarkeit. Die anderen verfügbaren

Systeme (Reduce, Macsyma, Maple und Mathematica) erforderten damals einen deutlich größeren Einarbeitungsaufwand, den wir den jungen Studierenden nicht zumuten wollten. Aus dieser Forschung entstanden die Lehrbücher (Koepf, Ben-Israel, Gilbert, 1993) und (Koepf, 1994), die thematisch Analysis I und Analysis II abdeckten. Diesen Vorlesungszyklus hatte ich nach meiner Rückkehr aus den USA an der Freien Universität Berlin nach diesem Konzept abgehalten.

Die Idee war hierbei nicht, eine Einführung in Computeralgebra zu geben, sondern, das CAS lediglich als didaktisches Hilfsmittel einzusetzen, um langwierige Rechnungen durchzuführen, aber auch, um Algorithmen zu programmieren und vorführen zu können. Die geplanten Computeralgebra-rechnungen wurden in der Vorlesung mittels eines Beamers live vorgeführt. Ferner war eine von vier Übungsaufgaben pro Woche für den Einsatz von Computeralgebra gedacht und eigentlich nur unter Benutzung von Derive lösbar. Man muss zugeben, dass der Einsatz des Beamers in der Vorlesung Zeit kostet. Viele Kollegen würden dies ablehnen, weil sie der Meinung sind, dass die Vorlesungszeit ohnehin zu kurz und daher heilig ist. Auf der anderen Seite lassen sich aber manche Rechnungen, die man der Vollständigkeit der Beweise zuliebe an der Tafel vorgeführt hätte, mühelos durch eine kurze CAS-Vorführung ersetzen. Hierbei kann man auch wieder Zeit einsparen. Alles in Allem heben sich meiner Meinung nach diese Effekte ungefähr auf, so dass der Einsatz von Computeralgebra in den Lehrveranstaltungen eine Win-Win-Situation ergibt, denn ohne zusätzlichen Aufwand können die Studierenden zusätzliche Kompetenzen erwerben, die für ihr weiteres Studium bedeutsam sein können.

Allerdings stellte sich heraus, dass meine Bücher nicht von der Klientel gekauft wurde, für die sie geschrieben worden waren: die Hochschul-lehrer. Die meisten Käufer waren nach Aussage des Verlags Gymnasi-allehrer. Ein wichtiger Grund hierfür war sicher die Tatsache, dass sich an den deutschen Universitäten, wenn überhaupt General-Purpose-CAS zum Einsatz kamen, ausschließlich die Systeme Maple und Mathematica durchsetzen konnten. Derive war den Hochschulkollegen zu einfach gestrickt. Da meine Ideen also eher an der Schule Verwendung fanden, schrieb ich in der Folge ein Buch, das im gymnasialen Oberstufenunter-richt eingesetzt werden konnte (Koepf, 1996). Eine Reihe anderer Projekte für den Mathematikunterricht wurden in (Koepf, 1995) gesammelt.

3 Computeralgebra an der Fachhochschule und in der Ingenieurausbildung

Im Jahr 1997 wurde ich Professor für Angewandte Mathematik an der Hochschule für Technik und Kultur (HTWK) Leipzig, einer Fachhochschule, die in dem Studiengang „Angewandte Mathematik“ auch Mathematiker ausbildete. Außerdem war ich dort für die Mathematikausbildung der Studierenden der Studiengänge Bibliothekswissenschaft und Buchhandel/Verlagswirtschaft zuständig. Die Studierenden meiner Analysis-Vorlesungen in Berlin kamen in der Regel gut zurecht mit dem Einsatz von Derive und beklagten sich auch nicht bei mir über den zusätzlichen Aufwand. Allerdings war mein Experiment dort auch nicht euphorisch aufgenommen worden. Meine Vorlesungen für Mathematikstudenten an der HTWK Leipzig, mit denen ich mit Mathematica arbeitete, waren für höhere Semester und behandelten Themen wie z. B. Graphentheorie, Kombinatorik, Kryptographie und Mathematische Modellierung. Diese Studierenden waren fast alle begeistert vom Computeralgebra-Einsatz. Als anwendungsorientierte Studierende, die zügig in die Industrie wechseln wollen, standen sie Computeranwendungen allgemein sehr offen gegenüber. Hier konnte ich bei einigen Studierenden sogar eine Begeisterung spüren.

Typischerweise bestand mein Unterricht in einer Mischung aus Vorlesung an der Tafel, wo ich sowohl die Theorie präsentierte als auch Beispiele händisch vorrechnete, dem Vorführen von Rechnungen mit dem CAS, händischen Übungsaufgaben der Studierenden, bei deren Lösung ich gegebenenfalls Unterstützung leistete, sowie Programmieraufgaben, die von den Studierenden durchgeführt wurden und die ich betreute. Der seminaristische Unterrichtsstil, der an Fachhochschulen üblich ist, kam diesem Programm sehr entgegen. Einigen Kohorten, die an der Fachhochschule ja Schulklassen ähneln, überließ ich die Entscheidung, ob die Klausur händisch oder mit Computerunterstützung durchgeführt werden soll. Interessanterweise entschieden sich die Studierenden in allen Fällen für die händische Klausur, da die Angst vor einem Absturz des CAS oder des PCs in der Prüfungssituation größer war als die Angst vor der händischen Klausur. Daher habe ich in späteren Semestern diese Frage gar nicht mehr gestellt. Jedenfalls bin ich aufgrund dieser Erfahrung überzeugt davon, dass der Einsatz von CAS im Unterricht sicher nicht zu schlechteren Leistungen bei der schriftlichen Prüfung führt. Dies konnte ich bei keiner der Studierendengruppen beobachten.

Ganz anders verhielt sich die Situation aber bei den Studierenden der Studiengänge Bibliothekswissenschaft und Buchhandel/Verlagswirtschaft. Diese hatten großen Respekt vor der Mathematikveranstaltung und bevorzugten ohne Wenn und Aber den traditionellen Unterricht an der Tafel. Wenn ich mit diesen Klassen dann in den PC-Pool zog, um mit den Studierenden einige einfache Aufgaben mit Derive zu lösen, dann kam mir recht viel Unbehagen entgegen. Diese Studierenden hielten ganz offensichtlich den Computeralgebraeinsatz für eine *zusätzliche* Hürde und eine Extrabelastung. Nach meiner Erfahrung hängt es also extrem vom jeweiligen Publikum ab, wie der CAS-Einsatz an der Hochschule aufgenommen wird.

4 Computeralgebra an der Universität

Seit dem Jahr 2000 bin ich nun Professor für Computational Mathematics an der Universität Kassel. Hier bin ich einerseits zuständig für die Mathematikausbildung der Elektrotechniker und Informatiker. Außerdem verrete ich dort u. a. das Forschungsgebiet Computeralgebra. In all diesen Funktionen habe ich in den letzten 14 Jahren keine Veranstaltung abgehalten, ohne regelmäßig auch Vorführungen mit Computeralgebra vorzunehmen. Ich halte dies als Gestaltungsmöglichkeit, die zur Auflockerung beiträgt, aber auch zum zusätzlichen Kompetenzerwerb, für ausgesprochen sinnvoll. Unter meinen Kolleginnen und Kollegen bin ich hier allerdings eher Außenseiter. Dies trifft zum einen auf die Mathematikveranstaltungen für die Studiengänge Elektrotechnik und Informatik zu. Hier werden in mehreren Semestern die wichtigsten Prinzipien aus Analysis und Linearer Algebra behandelt. Selbstverständlich lassen sich viele dieser Themen auch gut mit Computeralgebra bearbeiten. Wer, wenn nicht der Mathematikdozent, sollte diesen Studierenden, die später im Beruf vielleicht auf Mathematikprogramme treffen oder sogar darauf angewiesen sind, die Fähigkeiten eines CAS zeigen? Allerdings habe ich CAS für diese Studierenden niemals in der Prüfung eingesetzt. Hierfür waren zwei Gründe ausschlaggebend: Einerseits sprachen meine Erfahrungen aus Leipzig dagegen und andererseits die Vorgaben des Ingenieurfachbereichs. An Ingenieurfachbereichen denkt man meist noch sehr traditionell und wünscht sich keine stärkere Einbindung des Computers in der Prüfungssituation.

Für die Studierenden des Fachs Mathematik, zum einen in Diplom, Bachelor und Master, zum anderen aber auch im gymnasialen Lehramt, bot

ich regelmäßig Vorlesungen zum Lehrstoff Computeralgebra an. In diesen Vorlesungen lernt man, wie ein CAS funktioniert, auf welchen Algorithmen es beruht und wie man symbolische mathematische Algorithmen programmieren kann. Im Laufe der Jahre entstand hierbei das Lehrbuch (Koepf 2006). Bei diesen Vorlesungen spielte das Programmieren eine wichtige Rolle. Insbesondere kamen hier in der Prüfung auch Programmieraufgaben vor. Aber auch in anderen Vorlesungen für diese Studierendengruppe (z. B. Lineare Algebra, Funktionentheorie, Geschichte der Analysis u. v. m.) ist m. E. der exemplarische Einsatz eines CAS sinnvoll. Als letzte Gruppe möchte ich auf die Studierenden der Lehrämter Grundschule sowie Haupt- und Realschule eingehen. Außer einer Vorlesung Grundzüge der Mathematik, in welcher wieder regelmäßig ein CAS exemplarisch zum Einsatz kam, hielt ich für diese Studierendengruppen mehrfach Fachseminare ab, in welchen es meist um Elementargeometrie ging und das dynamische Geometrieprogramm Geogebra benutzt wurde. Dies wurde meist mit großer Freude von den Studierenden aufgegriffen. Die überwiegende Mehrheit dieser Studierenden hielt diese Tätigkeit auch für einen wichtigen Kompetenzerwerb für ihre spätere Tätigkeit.

Zusammenfassung

Zusammenfassend möchte ich festhalten, dass der Einsatz von CAS an Fachhochschule und Universität von verschiedenen Studierendengruppen sehr verschieden bewertet wird. Fachkollegen an der Universität stehen diesem Einsatz häufig noch reserviert gegenüber. Mein Credo ist jedoch, dass – wie auch der Schulunterricht – die Lehre an der Universität nicht nur fachliche Inhalte vermitteln, sondern auch zur Allgemeinbildung beitragen sollte. Am besten ist es, wenn sich diese beiden Ziele kombinieren lassen. Es steht für mich außer Frage, dass digitale Mathematikwerkzeuge jeder mathematischen Lehrveranstaltung einen Mehrwert an die Hand geben, wenn ihre Einbindung pädagogisch durchdacht geschieht. In diesem Punkt kann ich den Bildungsstandards (2012) nur zustimmen:

1.4 Digitale Mathematikwerkzeuge

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Das Potenzial dieser Werkzeuge entfaltet sich im Mathematikunterricht

- beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge, insbesondere durch interaktive Erkundungen beim Modellieren und Problemlösen,
- durch Verständnisförderung für mathematische Zusammenhänge, nicht zuletzt mittels vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten,
- mit der Reduktion schematischer Abläufe und der Verarbeitung größerer Datenmengen,
- durch die Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben einschließlich der reflektierten Nutzung von Kontrollmöglichkeiten.

Literatur

Axiom (2002): <http://www.axiom-developer.org/>

Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (2012). Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012, Download: <http://www.kmk.org/bildung-schule/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards/dokumente.html>

Koepf, W., Ben-Israel, A., & Gilbert, R. P. (1993): Mathematik mit Derive. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Koepf, W. (1994): Höhere Analysis mit Derive. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Koepf, W. (Hrsg.) (1995): Der Mathematikunterricht 41 (4): Derive-Projekte im Mathematikunterricht.

Koepf, W. (1996): Mathematikunterricht mit Derive. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Koepf, W. (1998): Hypergeometric Summation. An Algorithmic Approach to Summation and Special Function Identities. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Koepf, W. (2006): Computeralgebra. Eine algorithmisch orientierte Einführung. Berlin: Springer.

Maple (2014): <http://www.maplesoft.com/products/Maple/>

Mathematica (2014): <http://www.wolfram.com/mathematical/>

Matlab (2014): <http://www.mathworks.de/products/matlab/>

Maxima (1998): <http://maxima.sourceforge.net/>

Reduce (2009): <http://reduce-algebra.com/>, Download von <http://reduce-algebra.sourceforge.net/>