13 Anhang: Einführung in Derive

In diesem Anhang werden Derives grundlegende Eigenschaften erklärt, um für die ersten Schritte gewappnet zu sein.

Weitere Erklärungen werden, soweit benötigt, in den verschiedenen Derive-Sitzungen im ganzen Buch gegeben. Dieser Anhang sowie jene Erläuterungen sollen das Derive *Benutzerhandbuch* (s. S. 376) un terstützen, keineswegs ersetzen.

Derive ist ein Softwarepaket, das aus verschieden *Dateien*, im einzelnen

Programmdateien wie z. B. `DERIVE.EXE` und `DERIVE.HLP`,

mathematischen Dateien mit der Endung `.MTH` wie z. B. `MISC.MTH` usw., sowie

Demonstrationsdateien mit der Endung `.DMO`, wie z. B. `ALGEBRA.DMO`

besteht.

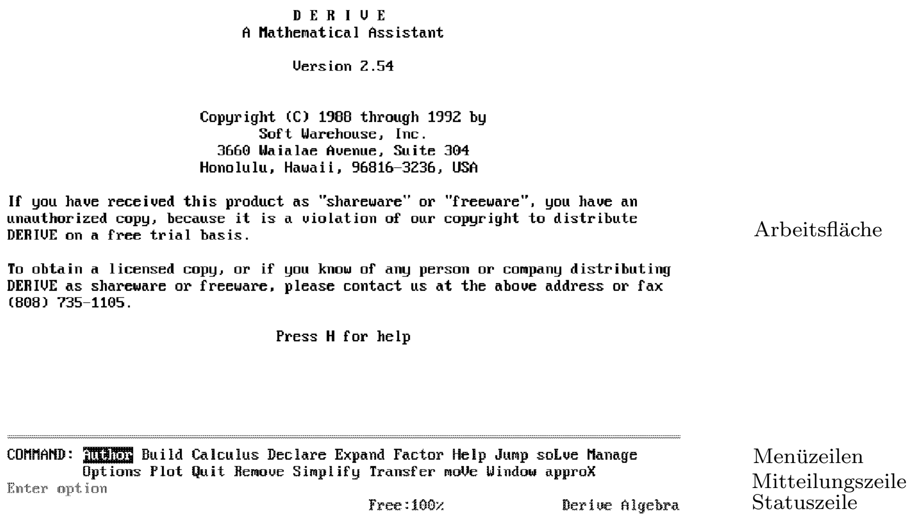

Abbildung 13.1 Der Eingangsbildschirm von Derive

Man startet Derive[1], indem man `derive`[2] eintippt (was die Programmdatei `DERIVE.EXE` aufruft) und die `<RETURN>`- oder `<ENTER>`-Taste (Zeilenschalttaste) drückt.

[1]Gesetzt den Fall, daß es auf dem jeweiligen PC bereits installiert ist (für Schritt-für-Schritt Anweisungen hierzu sehe man im Derive Benutzerhandbuch nach).

[2]Das Betriebssystem MS-DOS unterscheidet nicht zwischen Groß- und Kleinschreibung. Ob man also `DERIVE` oder `derive` oder auch `DeRiVe` eingibt, ist egal.

Der Eingangsbildschirm von DERIVE sieht etwa so aus wie Abbildung 13.1. Der obere Teil des Bildschirms (über der Doppellinie) ist die *Arbeitsfläche*, auf der vom Benutzer eingegebene Ausdrücke sowie die Ergebnisse von DERIVE angezeigt werden, siehe z. B. Abbildung 13.6. Der untere Teil des Bildschirms ist die *Menüfläche*, die aus drei Teilen besteht:

Menüzeilen, die den *Titel* des Menüs und die verfügbaren *Befehle* (*Optionen*) anzeigen. Zum Beispiel zeigt Abbildung 13.1 das COMMAND Menü mit 19 Befehlen, von Author bis approX,

einer *Mitteilungszeile*, die beschreibt, was DERIVE gerade tut oder was es vom Benutzer erwartet, sowie

einer *Statuszeile*, die andere Informationen anzeigt wie beispielsweise den Prozentsatz des verfügbaren Speichers (anfangs 100%).

In jedem Optionsnamen findet sich ein einzelner Großbuchstabe, beispielsweise der Buchstabe X im Befehl approX (kurz für *approximate*). Wir kennzeichnen die DERIVE-Optionen, indem wir den Optionsnamen innerhalb eines Kastens wie approX schreiben. Den unterscheidenden Buchstaben schreiben wir groß. Innerhalb DERIVEs wird eine Option ausgewählt durch

- *Eingabe des unterscheidenden Buchstabens* oder
- *Bewegen der hervorgehobenen Fläche* auf den Optionsnamen, und zwar durch die <TAB>- (Tabulatortaste) oder <SPACE BAR>-Taste (Leerschrittaste), um nach rechts zu kommen, oder die <SHIFT><TAB>- oder <BACK SPACE>-Taste (Rückschrittaste), um nach links zu kommen. Mit <ENTER> wird die Auswahl abgeschlossen.

Um beispielsweise eine DERIVE-Sitzung zu beenden, wähle man den Quit Befehl durch Eingabe von Q (oder q). Um unbeabsichtigtes Quit ten zu vermeiden, ohne die Ausdrücke gespeichert zu haben, die später noch benötigt werden könnten, reagiert DERIVE mit der Mitteilung Abandon expressions (Y/N)?,[3] auf die man mit Y (für „yes”, um zu beenden) oder N (für „no”, um fortzufahren) antwortet.

Anfangs ist der Author Befehl hervorgehoben (das ist die vorgeschlagene Auswahl). Um also Author im COMMAND Menü (Abbildung 13.1) auszuwählen, müssen wir nur <ENTER> drücken.

```
COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Enter option
                                            Free:100%              Derive Algebra
```

Abbildung 13.2 Auswahl des Options Befehls

[3]Sofern die Arbeitsfläche bereits Ausdrücke enthält.

In einem Menü eine Option auszuwählen, kann in ein *Untermenü* führen. Wählt man beispielsweise den `Options` Befehl, siehe Abbildung 13.2, so gelangt man ins `Options` Untermenü (Abbildung 13.3),

```
OPTIONS: Color Display Execute Input Mute Notation Precision Radix

Enter option
                                        Free:100%           Derive Algebra
```

Abbildung 13.3 Das `Options` Untermenü

in dem `Color` die vorgeschlagene Auswahl ist. Wählt man nun den `Precision` Befehl, kommt man zum `Options Precision` Untermenü von Abbildung 13.4.

```
OPTIONS PRECISION: Mode: Approximate Exact Mixed  Digits: 6

Select arithmetic mode
                                        Free:100%           Derive Algebra
```

Abbildung 13.4 Das `Options Precision` Untermenü

Durch Eingabe der Buchstabenkombination `O P` gelangen wir direkt vom `COMMAND` Menü zum `Options Precision` Untermenü.

Durch Drücken der `<ESC>`-Taste (Löschtaste) *verläßt* man ein Untermenü in das übergeordnete. Beispielsweise führt `<ESC> <ESC>` vom `Options Precision` Untermenü zurück zum `COMMAND` Menü.

Wir benutzen DERIVE nun zur Durchführung einiger Berechnungen. Das erste Beispiel ist die Approximation von $\sqrt{2}$. Wir wählen `Author` und schreiben `SQRT(2)`.

```
AUTHOR expression: SQRT(2)_

Enter expression
                                        Free:100%           Derive Algebra
```

Abbildung 13.5 Anwendung von `Author` `SQRT(2)`

Die Menüfläche sieht nun wie in Abbildung 13.5 aus und nach Drücken der `<ENTER>`-Taste wird $\sqrt{2}$ als `#1` in der Arbeitsfläche angezeigt, siehe Abbildung 13.6. Man beachte, daß jede Zeile (Eingabe oder Resultat) innerhalb der Arbeitsfläche von DERIVE eine Nummer bekommt, über die sie angesprochen werden kann. Der letzte Ausdruck wird invers angezeigt, z. B. Ausdruck `#8` in Abbildung 13.6. Andere Ausdrücke können markiert werden, indem man die hervorgehobene Fläche mittels der `<UP>`- (Aufwärtscursortaste) und `<DOWN>`- (Abwärtscursortaste) Cursortasten bewegt.

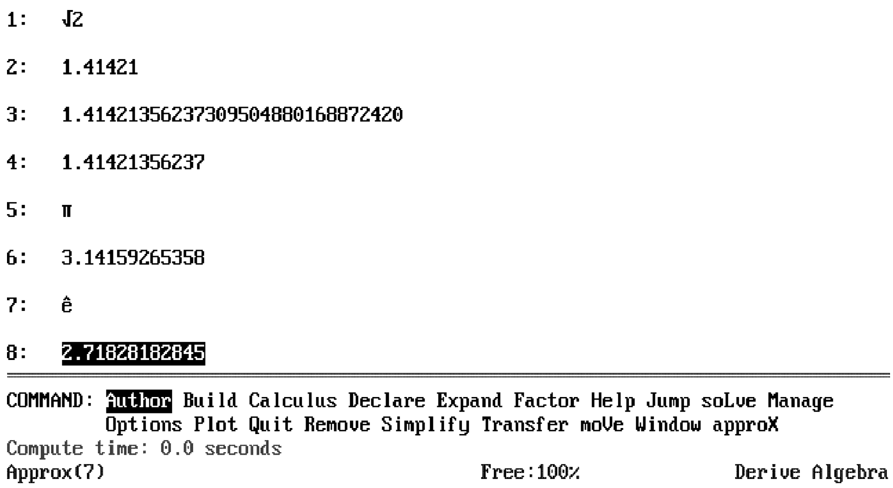

Abbildung 13.6 Ein `ALGEBRA`-Fenster mit approximierten Werten von $\sqrt{2}$, π und e

Nach der Eingabe eines Ausdrucks kann man DERIVE mitteilen, was mit diesem getan werden soll. Mögliche Befehle zur Vereinfachung, Auswertung sowie Umformung von Ausdrücken sind `Simplify`, `approX`, `Expand` und `Factor`.

Für die Approximation durch Dezimalzahlen ist der `approX` Befehl gedacht. Um also das Ergebnis aus Zeile `#2` zu bekommen (s. Abbildung 13.6), gebe man `X <ENTER>` ein. Man beachte, daß die voreingestellte Genauigkeit sechs Stellen beträgt, siehe Abbildung 13.4. Um die Genauigkeit auf beispielsweise 30 Stellen zu ändern, tippe man zuerst `O P`, um in das `Options Precision` Untermenü zu gelangen, springe mit der `<TAB>`-Taste mit dem Cursor auf `Digits: 6` und ersetze 6 durch 30. Dann drücke man `<ENTER>`, um zum `COMMAND` Menü zurückzukehren.

Wir approximieren wiederum den Ausdruck $\sqrt{2}$, indem wir die hervorgehobene Fläche auf den Ausdruck `#1` bewegen und `approX` auswählen. Unser neues Ergebnis erscheint in Zeile `#3`.

Man wiederhole die obige Prozedur, setze die `Precision` auf 12 Stellen und approximiere wieder den Ausdruck `#1`. Dies liefert Zeile `#4`.

Als nächstes approximieren wir die Kreiszahl π. Man gebe mit `Author` den Ausdruck `pi` ein, den DERIVE als π erkennt und auch so in Zeile `#5` anzeigt. Approximation von Ausdruck `#5` liefert in Zeile `#6` die ersten 12 Dezimalstellen von π.

Um e, die Basis des natürlichen Logarithmus, zu approximieren, wende man `Author` auf den Ausdruck `#e` an, den DERIVE als e erkennt und, wie in Zeile `#7`, durch $\hat{e}$ darstellt.[4] Approximation liefert dann Zeile `#8`.

Eine weitere Konstante, die DERIVE bekannt ist, ist die *imaginäre Zahl* i. Sie wird als `#i` eingegeben und von DERIVE durch $\hat{\imath}$ dargestellt.

DERIVE benutzt die Symbole

[4] Man beachte, daß man `#e` und nicht `e` eingeben muß!

`+,-` für *Addition* und *Subtraktion*, z. B. `a+b`, `a-b`,

`*` für *Multiplikation*, z. B. `a*b` (eine Leerstelle zwischen zwei Symbolen steht ebenso für Multiplikation, z. B. `a b`),

`/` für *Division*, z. B. `a/b`, oder, um Brüche darzustellen, z. B. `2/3` für $\frac{2}{3}$,

`^` für das *Potenzieren*, z. B. `a^b` für a^b.

Derive hält sich an die üblichen Konventionen für die Rechenreihenfolge, siehe auch § 1.2. Im Zweifel verwende man Klammern[5]. Zum Beispiel ist `(1-x^(n+1))/(1-x)` eine korrekte Art, den Ausdruck

9 : $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

einzugeben und `(a^2)/(b^3)` ein sicherer Weg für die Eingabe von

10 : $\dfrac{a^2}{b^3}$.

Als nächstes vereinfachen wir den Ausdruck $e^{i\pi}$. Dazu wende man $\boxed{\texttt{Author}}$ auf `#e^(#i*pi)` an, und `<ENTER>` führt zur Anzeige

11 : $\hat{e}^{\,\hat{\imath}\pi}$.

Weil wir die Ausdrücke e (Zeile `#7`) und π (Zeile `#5`) schon eingegeben hatten, ist dies gleichwertig zu `#7^(#i*#5)`.

Nun wende man $\boxed{\texttt{Simplify}}$ auf den Ausdruck `#11` an, und man erhält

12 : -1 .

Derive hat so die bekannte Identität

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

erzeugt, die die fünf wichtigsten Konstanten der Mathematik miteinander in Verbindung setzt, s. Kapitel 5.

Eine weitere Derive-Konstante ist `deg`, die durch das *Grad*-Symbol ^{o} darstellt wird. Mit $\boxed{\texttt{Simplify}}$ wird daraus $\frac{\pi}{180}$. Man benutzt `deg`, um vom *Gradmaß* in das *Bogenmaß* umzurechnen. Beispielsweise ergibt $\boxed{\texttt{Simplify}}$, angewandt auf auf `1 deg`, den Wert $\frac{\pi}{180}$, und $\boxed{\texttt{Simplify}}$, angewandt auf `90 deg`, liefert $\frac{\pi}{2}$ usw.

Die Arbeit mit Derive ist in diesem Buch in Derive-Sitzungen zusammengefaßt, in denen Ausdrücke und Ergebnisse, die auf dem Bildschirm wie in Abbildung 13.6 dargestellt sind, mit zusätzlichen Erklärungen wiedergegeben werden.

[5] In Derive müssen Klammern *rund* eingegeben werden, z. B. `(1-x)` und nicht `[1-x]` oder `{1-x}`. Ist ein eingeklammerter Ausdruck jedoch höher als eine Zeile, verwendet Derive für die Bildschirmdarstellung eckige Klammern.

Sitzung 13.1 (Elementare algebraische Operationen) In dieser Sitzung üben wir den interaktiven Gebrauch von DERIVE.

Die *Eingabe* (in der linken Spalte) ist ein arithmetischer Ausdruck (so, wie man ihn mit dem `Author` Befehl eintippen würde). Die nächste Spalte zeigt, wie DERIVE diese Eingabe anzeigt. Dann kommt der DERIVE *Befehl* `Simplify`, `approX`, `Expand` oder `Factor`, auf den in der rechten Spalte das Ergebnis folgt.

Eingabe	Anzeige	Befehl	Ausgabe
`2*3+4^2`	1: $2\ 3 + 4^2$	`Simplify`	2: 22,
`2*(3+4)^2`	3: $2\ (3+4)^2$	`Simplify`	4: 98.

Als nächstes berechnen wir den Sinus von 45^o, d. h. `SIN(pi/4)` oder `SIN(45 deg)`:

`SIN(45 deg)`	5: $\mathrm{SIN}\,(45\,^o)$	`Simplify`	6: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Approximieren wir stattdessen mit `approX`, erhalten wir 7: 0.707106.

Fragen wir umgekehrt, welcher Winkel $\frac{\sqrt{2}}{2}$ als Sinus hat. Die inversen trigonometrischen Funktionen werden in DERIVE mit `ASIN`, `ACOS`, `ATAN` usw. bezeichnet.

`ASIN(SQRT(2)/2)`	8: $\mathrm{ASIN}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$	`Simplify`	9: $\dfrac{\pi}{4}$.

Dies waren Beispiele *numerischer Berechnungen* mit numerischen Ergebnissen, die entweder *exakt* (beispielsweise die Ausdrücke `#6` und `#9`) oder *Näherungen* durch Dezimalzahlen sein können wie z. B. der Ausdruck `#7`. DERIVE kann auch *symbolische Berechnungen* mit Variablen durchführen. Beispielsweise bekommen wir

`a^m*a^n`	10: $a^m\ a^n$	`Simplify`	11: a^{m+n},
`a^m/a^n`	12: $\dfrac{a^m}{a^n}$	`Simplify`	13: a^{m-n},
`a^0`	14: a^0	`Simplify`	15: 1,
`(a+b)^2`	16: $(a+b)^2$	`Expand`	17: $a^2 + 2ab + b^2$.

Verwenden wir `Factor`, so gelangen wir zurück zu 18: $(a+b)^2$.

`(a+b)(a-b)`	19: $(a+b)(a-b)$	`Expand`	20: $a^2 - b^2$.

Verwenden wir `Factor` bei Ausdruck `#20`, so erhalten wir 21: $(a-b)(a+b)$.

Die Menüs `Expand` und `Factor` fragen nach Variablen usw. Meistens funktioniert die vorgeschlagene Auswahl, die durch `<ENTER>` bestätigt wird.

Nun eine wohlbekannte trigonometrische Identität.

`SIN^2 a+COS^2 a`	22: $\mathrm{SIN}\,(a)^{\,2} + \mathrm{COS}\,(a)^{\,2}$	`Simplify`	23: 1.

Als nächstes berechnen wir Summen. Um eine *Summe*

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) := f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

einzugeben, wende man `Author` auf den Ausdruck `SUM(f,k,m,n)` an. Alternativ kann man den `Calculus Sum` Befehl benutzen, der nach den benötigten Informationen fragt: dem *Summationsausdruck* f, der *Summationsvariablen* k, der *unteren Grenze* m und der *oberen Grenze* n. Zuerst berechnen wir die Summe $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

`SUM(k^2,k,1,n)` 24: $\sum_{k=1}^{n} k^2$ `Simplify` 25: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

und weiter die Summen $\sum_{k=1}^{n} k^3$ sowie $\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$:

`SUM(k^3,k,1,n)` 26: $\sum_{k=1}^{n} k^3$ `Simplify` 27: $\frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$,

`SUM(x^k,k,0,n)` 28: $\sum_{k=0}^{n} x^k$ `Simplify` 29: $\frac{x^{n+1}}{x-1} + \frac{1}{1-x}$.

Nun betrachten wir Produkte. Um das *Produkt*

$$\prod_{k=m}^{n} f(k) := f(m)\, f(m+1) \cdots f(n)$$

zu berechnen, verwendet man die DERIVE Prozedur `PRODUCT(f,k,m,n)` bzw. den `Calculus Product` Befehl.

Sei $n! := 1 \cdot 2 \cdots n$ die *Fakultät*. DERIVE erkennt das Symbol `!`. Wir benutzen es zur Veranschaulichung von `PRODUCT`:

`PRODUCT(k,k,1,n)` 30: $\prod_{k=1}^{n} k$ `Simplify` 31: $n!$,

in Übereinstimmung mit der Definition von $n!$.

Die obigen Resultate zeigen einfache Anwendungsmöglichkeiten von DERIVE. In den Demonstrationsdateien

`ALGEBRA.DMO`, `ARITH.DMO`, `CALCULUS.DMO`, `FUNCTION.DMO`, `MATRIX.DMO` und `TRIG.DMO`

werden andere Seiten von DERIVE vorgestellt, die in diesem Stadium nützlich sind. Diese Dateien zeigen, wie in DERIVE-Sitzung 13.1, *Eingabe-Ausgabe-Paare* auf dem Bildschirm.

Um eine dieser Dateien, etwa `ARITH.DMO`, innerhalb DERIVEs zu betrachten, wähle man den `Transfer Demo` Befehl und gebe den Dateinamen `ARITH` ein. Durch Drücken einer beliebigen Taste wird man sukzessive durch die Eingabe-Ausgabe-Paare geführt. Am Ende kommt man zurück in das `COMMAND` Menü.

Die folgende DERIVE-Sitzung demonstriert DERIVEs Fähigkeiten, mit großen ganzen Zahlen umzugehen.

Sitzung 13.2 (**Große ganze Zahlen**) Um 50! zu berechnen, wende man `Author` auf den Ausdruck `50!` an, worauf

1 : 50!

angezeigt wird. Nach `Simplify` erhält man

2 : 30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000 .

`approX` imiert man stattdessen den Ausdruck `#1`, so ergibt sich

3 : $3.04140\ 10^{64}$

in der üblichen Dezimalnotation. Dieser Darstellung sieht man an, daß 50! eine 64-stellige natürliche Zahl ist.

Wir erinnern daran, daß eine *Primzahl* eine natürliche Zahl ≥ 2 ist, die lediglich durch sich selbst und durch 1 teilbar ist.

Wendet man `Factor` auf Ausdruck `#1` an, so erhält man die Primfaktorzerlegung von 50!, nämlich

4 : $2^{47}\, 3^{22}\, 5^{12}\, 7^{8}\, 11^{4}\, 13^{3}\, 17^{2}\, 19^{2}\, 23^{2}\, 29\ \ 31\ \ 37\ \ 41\ \ 43\ \ 47$.

Dies zeigt, daß 47 mal der Faktor 2 in 50! auftaucht, 22 mal der Faktor 3, usw. Man sieht an dieser Darstellung ferner, daß die Primzahlen kleiner 50 die Zahlen

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43 \text{ und } 47$$

sind (warum?). Die Faktorisierung von `#4` ging sehr schnell, weil alle Primfaktoren klein sind. Im allgemeinen kostet die Primfaktorzerlegung großer natürlicher Zahlen viel Zeit. Als Beispiel betrachte man die *Fermatschen*[6] *Zahlen*

$$F_n := 2^{(2^n)} + 1 \qquad (n = 0, 1, \ldots)\ . \tag{13.1}$$

Wir setzen $n = 5$, wenden `Author` auf den Ausdruck `2^(2^5)+1` an, erhalten

5 : $2^{2^5} + 1$ und mit `Simplify` 6 : 4294967297 .

Faktorisieren von Ausdruck `#5` liefert seine Primfaktoren

7 : 641 6700417 ,

ein Ergebnis, das als erster LEONHARD EULER[7] kannte.[8] Die nächste Fermatsche Zahl F_6

[6] PIERRE DE FERMAT [1601–1655]
[7] LEONHARD EULER [1707–1783]
[8] Wie er damals auf diese Zerlegung gestoßen ist, ist leider nicht übermittelt.

8 : $2^{2^6}+1$ liefert mit $\boxed{\texttt{Simplify}}$ 9 : 18446744073709551617

und mit $\boxed{\texttt{Factor}}$ die Primfaktorzerlegung

10 : 274177 67280421310721 .

Die Faktorisierung von F_7 allerdings

11 : $2^{2^7}+1$ bzw. 12 : 340282366920938463463374607431768211457

dauert zu lange und muß abgebrochen werden.[9] Um eine gerade laufende Berechnung abzubrechen, drücke man die `<ESC>`-Taste.

Als nächstes zeigen wir, wie man in DERIVE mit Vektoren arbeiten kann. Ein *Vektor* ist eine geordnete Menge von Elementen, die in DERIVE durch Kommata abgetrennt werden und zwischen eckigen Klammern stehen, beispielsweise ist $[a, b, c]$ der Vektor mit den drei Elementen a, b und c. Dieser Vektor unterscheidet sich von den Vektoren $[a, c, b]$ oder $[c, b, a]$. Die Anzahl der Elemente in einem Vektor wird seine *Dimension* genannt. DERIVE erkennt Vektoren an den eckigen Klammern, die sie umschließen. Beispielsweise interpretiert DERIVE `[x,-5,0,pi,#e]` als den Vektor mit den 5 Elementen

$$x, -5, 0, \pi, e .$$

Die Dimension eines gegebenen Vektors `v` wird mit der Funktion `DIMENSION(v)` abgefragt. Wendet man beispielsweise $\boxed{\texttt{Simplify}}$ auf `DIMENSION([a,b,c])` an, erhält man als Ergebnis 3.

Das k. *Element* eines Vektors kann mit der Funktion `ELEMENT(v,k)` ausgewählt werden. Der Ausdruck `ELEMENT([x,-5,0,pi,#e],2)` steht beispielsweise für das 2. Element des Vektors `[x,-5,0,pi,#e]` und ergibt folglich -5.

Sind die Elemente eines Vektors durch eine Formel gegeben, benutzen wir die Funktion `VECTOR(f,k,m,n)` zur Eingabe des $(n-m+1)$-dimensionalen Vektors $(m \le n)$

$$[f(m),\ f(m+1),\ \ldots,\ f(n-1),\ f(n)] .$$

Zum Beispiel ist `VECTOR(k^2,k,3,6)` der 4-dimensionale Vektor $[3^2, 4^2, 5^2, 6^2]$.

Sitzung 13.3 (**Vektoren**) Vektoren werden komponentenweise addiert. Definiert man beispielsweise die Vektoren

1 : $a := [1,\ 0,\ -3,\ 2,\ x]$ und 2 : $b := [x,\ 3,\ 2,\ -5,\ -1]$,

so läßt sich ihre Summe[10]

[9]Die Faktorisierung lautet $F_7 = 59649589127497217 \cdot 5704689200685129054721$.

[10]Man überlege sich und teste, was geschieht, wenn man versucht, Vektoren verschiedener Dimension zu addieren.

3 : $a+b$ mit `Simplify` zu 4 : $[1+x,\ 3,\ -1,\ -3,\ x-1]$

vereinfachen.

Um den Vektor der ersten 7 Fermatschen Zahlen zu berechnen

$$F_n := 2^{(2^n)} + 1 \qquad (n = 0, 1, \ldots, 6)\,, \tag{13.1}$$

gibt man mit `Author` den Ausdruck `VECTOR(2^(2^n)+1,n,0,6)` ein und erhält

5 : $\mathrm{VECTOR}\left[2^{2^n} + 1, n, 0, 6\right]$ und mit `Simplify` dann

6 : $[3,\ 5,\ 17,\ 257,\ 65537,\ 4294967297,\ 18446744073709551617]\,.$

Diese ersten 7 Fermatschen Zahlen können wir mit einem einzigen Befehl faktorisieren, nämlich durch Anwendung von `Factor` auf den Ausdruck `#6`, und wir bekommen

7 : $[3,\ 5,\ 17,\ 257,\ 65537,\ 641\ \ 6700417,\ 274177\ \ 67280421310721]\,.$

Dies zeigt, daß die ersten fünf Fermatschen Zahlen Primzahlen sind, während die nächsten beiden zusammengesetzt sind.

Beispiel 13.1 Man bezeichne die k. Primzahl mit p_k und benutze DERIVE, um das kleinste n zu finden, für das

$$E_n := p_1 \cdot p_2 \ \cdots \ p_n + 1 = \prod_{k=1}^{n} p_k + 1$$

eine zusammengesetzte Zahl ist.

Wir verwenden die DERIVE Funktion `NTH_PRIME(k)`, die die k. Primzahl p_k liefert. Diese Funktion befindet sich in der Datei `MISC.MTH`, die erst durch

`Transfer Load Utility` `MISC.MTH`

geladen werden muß. Der Ausdruck

`VECTOR(PRODUCT(NTH_PRIME(k),k,1,n)+1,n,1,9)`

steht für den Vektor der ersten 9 Werte E_n, und wir bekommen zunächst

1 : $\mathrm{VECTOR}\left[\left[\prod_{k=1}^{n} \mathrm{NTH\_PRIME}\ (k)\right] + 1,\ n,\ 1,\ 9\right]$

und mit `Simplify` dann

2 : $[3,\ 7,\ 31,\ 211,\ 2311,\ 30031,\ 510511,\ 9699691,\ 223092871]\,.$

Faktorisierung liefert

3 :   [3, 7, 31, 211, 2311, 59 509, 19 97 277, 347 27953, 317 703763] ,

was zeigt, daß die ersten 5 Werte E_n Primzahlen, die nächsten vier aber zusammengesetzt sind. Die erste zusammengesetzte Zahl E_n ist deshalb

$$E_6 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509 \,. \quad \triangle$$

Die folgende DERIVE-Sitzung beschäftigt sich mit dem Lösen von Gleichungen.

Sitzung 13.4 (**Lösung von Gleichungen**) Um die quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

zu lösen, gebe man den Ausdruck `a x^2 + b x + c = 0` ein, so daß

1 : $ax^2 + bx + c = 0$

angezeigt wird. Mit `soLve` erhält man dann die beiden Lösungen

2 : $x = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}$ 3 : $x = -\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac} + b}{2a}$.

Ähnliches gilt für die Lösungen von

4 : $x^2 + 1 = 0$,   nämlich

5 : $x = -\hat{\imath}$ und   6 : $x = \hat{\imath}$,

wobei $\hat{\imath}$ für die imaginäre Einheit steht. Die Gleichung

7 : $x^3 = 1$ hat drei Lösungen, die *kubischen Einheitswurzeln* :

8 : $x = 1$,   9 : $x = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\,\hat{\imath}}{2}$,   10 : $x = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\,\hat{\imath}}{2}$.

Zuletzt lösen wir die Gleichung $e^x = a$. Gibt man den Ausdruck `#e^x = a` ein, so erhält man

11 : $\hat{e}^x = a$ und mit `soLve` dann   12 : $x = \mathrm{LN}\,(a)$,

den natürlichen Logarithmus von a.

Als letztes beschreiben wir die graphischen Fähigkeiten von DERIVE. Dafür benötigen wir das Konzept der *Fenster*, von denen es drei Arten gibt:

`ALGEBRA`-*Fenster*, um numerische oder symbolische Eingaben sowie Ergebnisse darzustellen, siehe z. B. Abbildung 13.6, *2-dimensionale* `PLOT`-*Fenster*, die benutzt werden, um die Graphen von Ausdrükken mit einer einzigen Variablen wie etwa x^2 oder $y = x^2$ darzustellen, sowie

3-dimensionale `PLOT`-*Fenster*, um die Graphen von Ausdrücken mit zwei Variablen wie etwa $x^2 + y^2$ oder $z = x^2 + y^2$ darzustellen.

Man kann ein `PLOT`-Fenster öffnen, indem man im Menü eines `ALGEBRA`-Fensters den `Plot` Befehl auswählt.[11]

Hat der im `ALGEBRA`-Fenster hervorgehobene Ausdruck genau eine Variable, etwa x^2 oder $y = x^2$, dann öffnet DERIVE ein 2-dimensionales `PLOT`-Fenster. Es werden eine Vielzahl von Optionen (Befehle und/oder Untermenüs) angeboten, wie in Abbildung 13.7 gezeigt.

```
COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
         Zoom
Enter option
Cross x:1            y:1           Scale x:1       y:1       Derive 2D-plot
```

Abbildung 13.7 Das 2-dimensionale `Plot` Menü

Hat der hervorgehobene Ausdruck zwei Variablen, beispielsweise $x^2 + y^2$ oder auch $z = x^2+y^2$, dann öffnet DERIVE ein 3-dimensionales `PLOT`-Fenster. Dessen Optionen zeigt Abbildung 13.8.

```
COMMAND: Algebra Center Eye Focal Grids Hide Length Options Plot Quit Window
         Zoom
Enter option
Center x:0          y:0            Length x:10      y:10      Derive 3D-plot
```

Abbildung 13.8 Das 3-dimensionale `Plot` Menü

Der Graph des im `Algebra`-Fenster hervorgehobenen Ausdrucks wird dann durch den `Plot` Unterbefehl erzeugt. Das Zeichnen wird über die verschiedenen Optionen gesteuert, die zunächst voreingestellte Werte haben. Falls diese Werte eingesehen oder die derzeitige graphische Darstellung verändert werden soll, gehe man durch die verschiedenen Punkte im `Plot` Menü, speziell des `Plot Options` Untermenüs. Im Detail werden diese Optionen im DERIVE Benutzerhandbuch erklärt; einige von ihnen werden im weiteren erläutert.

Die in jedem `Plot` Menü vorgeschlagene Auswahl ist `Algebra`, welche ins `ALGEBRA`-Fenster zurückführt.

[11] Mit dem `Window` Menü kann man jedes beliebige Fenster öffnen, schließen und auf andere Art manipulieren. Insbesondere ist es möglich, ein `ALGEBRA`- und ein `PLOT`-Fenster nebeneinander zu haben, was ab DERIVE-Version 2.10 die vorgegebene Einstellung ist, sobald `Plot` aufgerufen wird.

Sitzung 13.5 (**Graphische Darstellungen**) Wir beginnen mit einer 2-dimensionalen graphischen Darstellung der *Einheitskreislinie*. Diese wird durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{3.1}$$

beschrieben. Gibt man `x^2+y^2=1` ein, erhält man

1 : $\quad x^2 + y^2 = 1$ und mit `soLve` nach y aufgelöst, die beiden Lösungen

2 : $\quad y = -\sqrt{1 - x^2}$ und 3 : $\quad y = \sqrt{1 - x^2}$.

Nun führt `P` in das `Plot` Menü von Abbildung 13.7, wodurch man in ein `Plot` Fenster[12] wechselt. Erneute Eingabe von `P` wählt den `Plot` Befehl aus. Eine graphische Darstellung des Ausdrucks `#3` erscheint auf dem Bildschirm, da dieser Ausdruck beim Öffnen des `Plot` Menüs hervorgehoben war. Die obere Hälfte der Einheitskreislinie ist zu sehen, d. h. die positive Lösung von (3.1). Keine Angst, wenn sie mehr wie eine Halb-Ellipse aussieht. Das werden wir bald beheben.

Besteht die Darstellung nur aus einzelnen Punkten, gebe man die richtige Einstellung im `Options Display` Untermenü von Abbildung 13.9 an:

`Mode`: `Graphics`

`Resolution`: `High` `Set`: `Extended`

`Adapter`: Die verwendete Graphikkarte muß bekannt sein, etwa `VGA`.

Die besten Einstellungen für die `Plot` Optionen kann man durch Probieren und/oder durch Konsultieren des DERIVE Benutzerhandbuchs herausfinden. Hat man befriedigende Einstellungen gefunden, so kann man sie für zukünftigen Gebrauch mit dem `Transfer Save State` Befehl des `COMMAND` Menüs *speichern*. Die Einstellungen werden in einer Datei namens `DERIVE.INI` gesichert und bei jedem erneuten Aufruf von DERIVE verwendet. Entscheidet man sich, die Datei `DERIVE.INI` nicht zu *überschreiben*, kann man die Einstellungen in einer anderen Datei (mit der Endung `.INI`) abspeichern und jedesmal mit dem `Transfer Load State` Befehl wieder laden, wenn man diese Einstellungen benötigt.

```
Mode: Text Graphics   Reso: Medium(High) Text:(Large)Small   Set: Std(Extended)
Adapter: MDA CGA EGA MCGA(VGA)Hercules AT&T T3100 PCjr Other
Select display mode
Cross x:1            y:1            Scale x:1        y:1         Derive 2D-plot
```

Abbildung 13.9 Das `Plot Options Display` Untermenü

Man beachte, daß in DERIVEs 2-dimensionalem `PLOT`-Fenster die Achsen stets mit x und y bezeichnet sind, unabhängig von den im `ALGEBRA`-Fenster verwendeten Variablennamen.

[12] Ab Version 2.10 wird automatisch ein zweites Fenster geöffnet. Wer dies nicht wünscht, sollte die Option `Overlay` wählen.

Als nächstes kehre man ins `ALGEBRA`-Hauptfenster zurück. Nun bewege man die hervorgehobene Fläche mit der `<UP>`-Cursortaste nach oben, um den Ausdruck `#2` hervorzuheben, und verwende wieder den `Plot Plot` Befehl, um diesen Ausdruck ebenfalls graphisch darzustellen.

Der Bildschirm zeigt jetzt die gesamte Kreislinie, die allerdings eher einer Ellipse denn einem Kreis gleichen mag. Um das zu verbessern, müssen wir das *Achsenverhältnis* ändern, das das Verhältnis der *Markierungen* auf der x- und y-Achse zueinander beschreibt. Man wähle das `Ticks` Untermenü und gebe neue Werte für

```
TICKS: Rows: _     Columns: _
```

ein. Mit der `<TAB>`-Taste kann man zwischen den beiden Eingabefeldern hin- und herspringen. Man wiederhole diese Prozedur solange, bis die Zeichnung wie ein Kreis aussieht.

Ist die Kreislinie zu klein, so kann sie mit dem `Zoom` Untermenü vergrößert werden, und zwar mit den Befehlen `Zoom Both` (beide Achsen) und `In` [13]. Am Schluß sollte der Bildschirm ähnlich wie in Abbildung 13.10 aussehen.

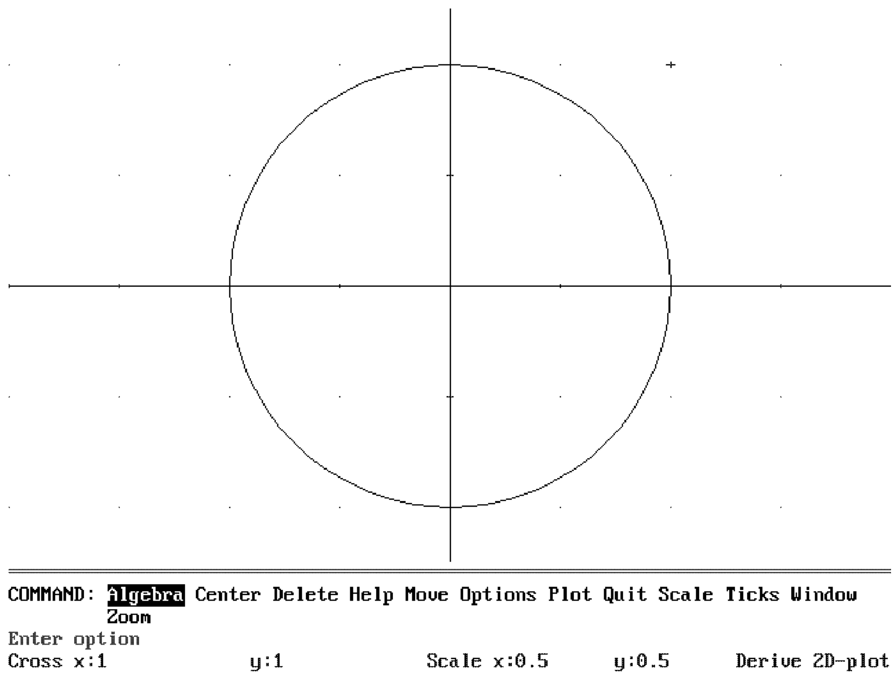

Abbildung 13.10 Ein zwei-dimensionales `PLOT`-Fenster von DERIVE

Ein 2-dimensionales `PLOT`-Fenster speichert eine Liste all jener Ausdrücke, die in das `Plot` Menü eingegeben werden. Diese werden jedesmal gezeichnet, wenn man den

[13] Der Befehl `Zoom Both Out` liefert einen kleineren Kreis, während der Kreis wieder zu einer Ellipse verformt wird, falls man nur eine der Achsen zoomt.

`Plot Plot` Befehl ausführt. Man kann einige oder alle diese Ausdrücke mit dem `Delete` Untermenü löschen.

Nun wollen wir einige andere Funktionen graphisch darstellen. Dazu lösche man zuerst die vorherigen graphischen Darstellungen mit dem Befehl `Delete All` des `Plot` Menüs. Dann skaliere man das `PLOT`-Fenster durch Eingabe der Werte[14]

```
SCALE: x scale: 1  y scale: 1
```

mit dem `Scale` Untermenü neu. Ferner kehre man in das `ALGEBRA`-Fenster zurück, gebe den Vektor `[|x|,SIGN(x),x^2,SQRT(x)]` ein und stelle diese vier Funktionen graphisch dar. Das Ergebnis sollte ähnlich aussehen wie Abbildung 3.1 auf Seite 46.

Wir veranschaulichen als letztes anhand des Graphen von $z = (x^2 + y^2)\sin x \sin y$ die 3-dimensionale Graphik. Zuerst gebe man `(x^2+y^2) SIN x SIN y` ein, dann wechsle man mit `Plot` in ein 3-dimensionales `PLOT`-Fenster. Mit dem `Plot` Untermenü bekommt man dann einen Graphen, der Abbildung 13.11 ähnelt.

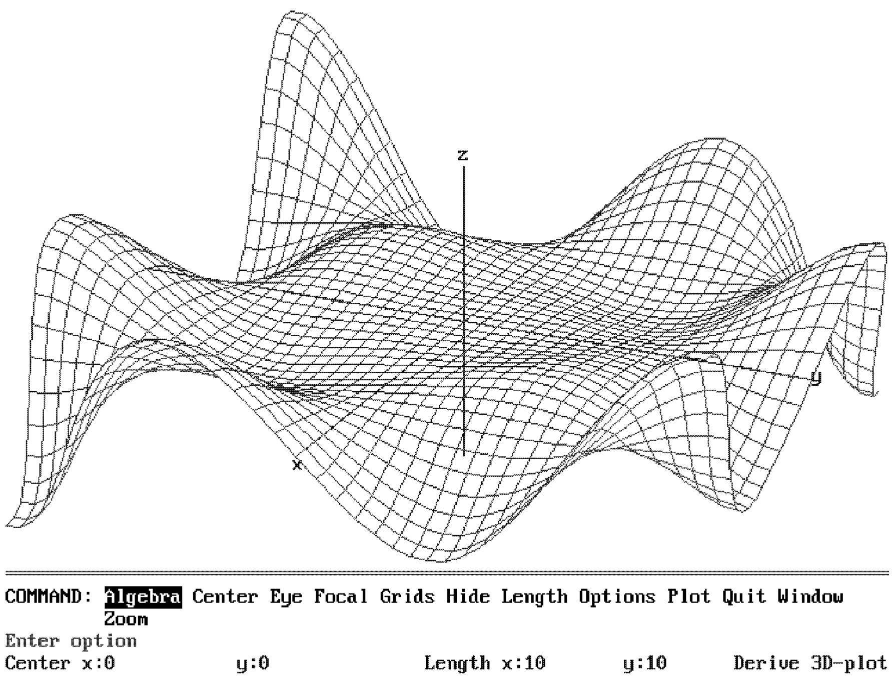

Abbildung 13.11 3-dimensionale graphische Darstellung von $(x^2 + y^2)\sin x \sin y$

Ist die Darstellung unbefriedigend, probiere man es mit einer neuen Zeichnung mit anderen Einstellungen im 3-dimensionalen `PLOT`-Fenster. Im einzelnen verwendet die Graphik aus Abbildung 13.11 die Einstellungen:

```
Eye: x:22   y:10   z:200     Auto: Yes (No)
Grids: x:40   y:40
```

[14]Text überschreibt man mit durch `<SPACE>` eingegebenen Leerstellen.

$\boxed{\texttt{Eye}}$ gibt den Standpunkt des Betrachters an. Unterschiedliche Einstellungen zeigen die Achsen[15] und den Graphen aus verschiedenen Winkeln. Man probiere dies. $\boxed{\texttt{Grids}}$ gibt die Feinheit der Unterteilung für die Berechnung von Funktionswerten an. Je höher die Zahl, desto feiner ist der Graph und desto länger dauert es, ihn zu berechnen. Wählt man zu hohe Werte für $\boxed{\texttt{Grids}}$, so kann der Speicher aufgebraucht sein, bevor die Berechnung der graphischen Darstellung abgeschlossen ist. DERIVE liefert bereits mit den eingestellten Werten meist befriedigende Resultate.

Übungsaufgaben

◇ **13.1** *Mit der* DERIVE *Funktion* `SQRT(x)` *bzw.* `x^(1/2)` *wird die Quadratwurzel von* x *dargestellt. Man vereinfache mit* DERIVE*:*

(a) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$, (b) $\sqrt[8]{408\sqrt{2}+577}$, (c) $\sqrt[4]{19601-13860\sqrt{2}}$,

(d) $173\sqrt{34}\sqrt{2\sqrt{34}+35}+1394\sqrt{2\sqrt{34}+35}-1567\sqrt{34}$.

Hinweis: *Man verwende geschachtelte Quadratwurzeln.*

◇ **13.2** *Man faktorisiere die Ausdrücke* n^4+4 *und* $a^{10}+a^5+1$.

◇ **13.3** *Man berechne mit* DERIVE*:*

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,(k-1)$, (b) $\sum\limits_{k=2}^{n} k\,(k-1)\,(k-2)$, (c) $\sum\limits_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)(k-3)$.

Man benutze diese Ergebnisse, um eine Formel für

$$\sum_{k=m}^{n} k\,(k-1)\cdots(k-m)$$

zu erraten.

◇ **13.4** *Man berechne mit* DERIVE $100!$ *sowie die Primfaktorzerlegung von* $100!$. *Wieviele Endnullen hat diese Zahl? Man berechne die Anzahl der Nullen am Ende der Dezimaldarstellung von* $1000!$ *und vergleiche das erhaltene Ergebnis mit dem von* DERIVE.

◇ **13.5** *Ist* p *eine Primzahl, so nennt man die Zahlen*

$$M_p := 2^p - 1 \qquad (p \text{ Primzahl})$$

die Mersenneschen[16] *Zahlen. Mersenne vermutete, daß diese lediglich für die 10 Werte* $p = 2,3,5,7,17,19,31,67,127,257$ *Primzahlen sind. Diese Vermutung ist falsch*[17]. *Im einzelnen:*

[15] Die Achsen im 3-dimensionalen `PLOT`-Fenster werden, unabhängig von den Variablennamen im `ALGEBRA`-Fenster, stets mit x, y und z bezeichnet.

[16] M. MERSENNE [1588–1648]

[17] Es gibt 28 bekannte Mersenne-Primzahlen. Die größte davon ist die Mersennsche Zahl M_{86243}, eine Zahl mit etwa 26000 Stellen.

(a) M_{61} *ist eine Primzahl, und* 61 *ist nicht in Mersennes Liste.*

(b) M_{67} *ist zusammengesetzt, tatsächlich ist*

$$M_{67} = 147\,573\,952\,589\,676\,412\,927 = 193\,707\,721 \ \times \ 761\,838\,257\,287\ .$$

(c) M_{257} *ist zusammengesetzt.*

Man weise mit DERIVE (a) *und* (b)[18] *nach. Man versuche nicht,* (c) *nachzuweisen. Geduld und Speicher des Computers werden zu Ende gehen, bevor die Antwort gefunden ist.*

◇ **13.6** *Die* DERIVE *Funktion* `NEXT_PRIME(n)` *berechnet die erste Primzahl, die größer als n ist. Welche Primzahl folgt direkt auf*

(a) 70, (b) 1 000, (c) 3 333, (d) 1 000 000, (e) 10^{64}*?*

◇ **13.7** *Es kann lange dauern, eine natürliche Zahl mit großen Primfaktoren zu faktorisieren.*[19]

(a) *Man konstruiere für ein großes n mit* `NEXT_PRIME(n)` *eine Primzahl und versuche dann, sie zu faktorisieren.*

(b) *Man konstruiere zwei große Primzahlen und faktorisiere dann ihr Produkt. Man beobachte, wie lange diese Faktorisierungen brauchen. Man benutze* `<ESC>`*, um eine Berechnung, die zu lange dauert, abzubrechen.*

◇ **13.8** *Verwende* `Factor`*, um zu zeigen, daß das Produkt von* 4 *aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen um* 1 *kleiner als eine Quadratzahl ist.*

◇ **13.9** *Man benutze die* `VECTOR` *Funktion, um die Graphen der Summen*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4\,\sin\left((2k-1)\pi x\right)}{(2k-1)\pi}$$

für $n = 1, \ldots, 5$ darzustellen. Man stelle sich vor, was für immer größer werdendes n geschieht.

⋆ **13.10** *Man vereinfache*

(a) $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\ ,$ (b) $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}\ .$

Hinweis: *Die dargestellten Zahlen sind ganz.*

[18]Man beachte, wie lange die Faktorisierung von M_{67} braucht. Zuerst wurde diese Zahl 1903 von F. N. Cole faktorisiert. Auf die Frage, wie lange er gebraucht habe, M_{67} zu knacken, sagte er „three years of Sundays", (E. T. Bell, *Mathematics: Queen and Servant of Science*, McGraw-Hill, 1951, S. 228). Mit DERIVE hätte er 3 Jahre gespart…

[19]Die moderne Kryptologie, die Wissenschaft vom Verschlüsseln und Entschlüsseln geheimer Botschaften, baut hierauf auf.