# Methoden der Computeralgebra für orthogonale Polynome

Prof. Dr. Wolfram Koepf

Universität Kassel

http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf

Geburtstagskolloquium 2006

2. Dezember 2006 / Stuttgart



### Überblick

- Prof. Dr. Peter Lesky
- Computeralgebra
- Klassische orthogonale Polynome
- Hypergeometrische Funktionen
- Eigenschaften der klassischen orthogonalen Polynome
- Zeilberger-Algorithmus
- Petkovsek-van Hoeij-Algorithmus
- Lösung von Rekusionsgleichungen durch klassische OPS



### Überblick

- Prof. Dr. Peter Lesky
- Computeralgebra
- Klassische orthogonale Polynome
- Hypergeometrische Funktionen
- Eigenschaften der klassischen orthogonalen Polynome
- Zeilberger-Algorithmus
- Petkovsek-van Hoeij-Algorithmus
- Lösung von Rekusionsgleichungen durch klassische OPS







#### Peter Lesky als Lehrer

- Ich war Anfang der 1970er Jahre Student bei Peter Lesky und hörte seine Vorlesung Mathematische Strukturen.
- Peter Lesky hat 20 Promotionen betreut. Einer seiner Schüler, Klaus Ulshöfer, war mein Schullehrer am Stuttgarter Karls-Gymnasium.



#### Peter Lesky als Lehrer

- Ich war Anfang der 1970er Jahre Student bei Peter Lesky und hörte seine Vorlesung Mathematische Strukturen.
- Peter Lesky hat 20 Promotionen betreut. Einer seiner Schüler, Klaus Ulshöfer, war mein Schullehrer am Stuttgarter Karls-Gymnasium.



#### Peter Lesky als Lehrer

- Ich war Anfang der 1970er Jahre Student bei Peter Lesky und hörte seine Vorlesung Mathematische Strukturen.
- Peter Lesky hat 20 Promotionen betreut. Einer seiner Schüler, Klaus Ulshöfer, war mein Schullehrer am Stuttgarter Karls-Gymnasium.



### Peter Lesky als Kollege

- Nachdem ich in den 1980er Jahren in der geometrischen Funktionentheorie geforscht habe, wandte ich mich in den 1990er Jahren dem Studium der orthogonalen Polynome zu und entdeckte die Arbeiten von Peter Lesky.
- Eine weitere Gemeinsamkeit ist unser Interesse für die mathematische Lehre und Didaktik.



### Peter Lesky als Kollege

- Nachdem ich in den 1980er Jahren in der geometrischen Funktionentheorie geforscht habe, wandte ich mich in den 1990er Jahren dem Studium der orthogonalen Polynome zu und entdeckte die Arbeiten von Peter Lesky.
- Eine weitere Gemeinsamkeit ist unser Interesse für die mathematische Lehre und Didaktik.



### Überblick

- Prof. Dr. Peter Lesky
- Computeralgebra
- Klassische orthogonale Polynome
- Hypergeometrische Funktionen
- Eigenschaften der klassischen orthogonalen Polynome
- Zeilberger-Algorithmus
- Petkovsek-van Hoeij-Algorithmus
- Lösung von Rekusionsgleichungen durch klassische OPS



### Computeralgebrasysteme

- Ich werde das Computeralgebrasystem Maple benutzen, um die betrachteten Algorithmen zu programmieren und zu präsentieren.
- Natürlich könnte man auch jedes andere General-Purpose-System wie z. B. Mathematica, MuPAD oder Reduce benutzen.

#### Algorithmen



### Computeralgebrasysteme

- Ich werde das Computeralgebrasystem Maple benutzen, um die betrachteten Algorithmen zu programmieren und zu präsentieren.
- Natürlich könnte man auch jedes andere General-Purpose-System wie z. B. Mathematica, MuPAD oder Reduce benutzen.

#### Algorithmen



### Computeralgebrasysteme

- Ich werde das Computeralgebrasystem Maple benutzen, um die betrachteten Algorithmen zu programmieren und zu präsentieren.
- Natürlich könnte man auch jedes andere General-Purpose-System wie z. B. Mathematica, MuPAD oder Reduce benutzen.

### Algorithmen



### Computeralgebrasysteme

- Ich werde das Computeralgebrasystem Maple benutzen, um die betrachteten Algorithmen zu programmieren und zu präsentieren.
- Natürlich könnte man auch jedes andere General-Purpose-System wie z. B. Mathematica, MuPAD oder Reduce benutzen.

### Algorithmen



### Computeralgebrasysteme

- Ich werde das Computeralgebrasystem Maple benutzen, um die betrachteten Algorithmen zu programmieren und zu präsentieren.
- Natürlich könnte man auch jedes andere General-Purpose-System wie z. B. Mathematica, MuPAD oder Reduce benutzen.

### Algorithmen



### Computeralgebrasysteme

- Ich werde das Computeralgebrasystem Maple benutzen, um die betrachteten Algorithmen zu programmieren und zu präsentieren.
- Natürlich könnte man auch jedes andere General-Purpose-System wie z. B. Mathematica, MuPAD oder Reduce benutzen.

### Algorithmen



### Überblick

- Prof. Dr. Peter Lesky
- Computeralgebra
- Klassische orthogonale Polynome
- Hypergeometrische Funktionen
- Eigenschaften der klassischen orthogonalen Polynome
- Zeilberger-Algorithmus
- Petkovsek-van Hoeij-Algorithmus
- Lösung von Rekusionsgleichungen durch klassische OPS



### Skalarprodukte

Gegeben: ein Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,d\mu(x)$$

mit nicht-negativem Borelmaß  $\mu(x)$  und Träger im Intervall [a,b].

- absolut stetiges Maß  $d\mu(x) = \rho(x) dx$  mit Gewichtsfunktion  $\rho(x)$ ,
- diskretes Maß  $\mu(x) = \rho(x)$  with Träger in  $\mathbb{Z}$ ,
- diskretes Maß  $\mu(x) = \rho(x)$  mit Träger in  $q^{\mathbb{Z}}$ .



### Skalarprodukte

Gegeben: ein Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,d\mu(x)$$

mit nicht-negativem Borelmaß  $\mu(x)$  und Träger im Intervall [a,b].

- absolut stetiges Maß  $d\mu(x) = \rho(x) dx$  mit Gewichtsfunktion  $\rho(x)$ ,
- diskretes Maß  $\mu(x) = \rho(x)$  with Träger in  $\mathbb{Z}$ ,
- diskretes Maß  $\mu(x) = \rho(x)$  mit Träger in  $q^{\mathbb{Z}}$ .



### Skalarprodukte

Gegeben: ein Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,d\mu(x)$$

mit nicht-negativem Borelmaß  $\mu(x)$  und Träger im Intervall [a,b].

- absolut stetiges Maß  $d\mu(x) = \rho(x) dx$  mit Gewichtsfunktion  $\rho(x)$ ,
- diskretes Maß  $\mu(x) = \rho(x)$  with Träger in  $\mathbb{Z}$ ,
- diskretes Maß  $\mu(x) = \rho(x)$  mit Träger in  $q^{\mathbb{Z}}$ .



### Skalarprodukte

Gegeben: ein Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,d\mu(x)$$

mit nicht-negativem Borelmaß  $\mu(x)$  und Träger im Intervall [a,b].

- absolut stetiges Maß  $d\mu(x) = \rho(x) dx$  mit Gewichtsfunktion  $\rho(x)$ ,
- diskretes Maß  $\mu(x) = \rho(x)$  with Träger in  $\mathbb{Z}$ ,
- diskretes Maß  $\mu(x) = \rho(x)$  mit Träger in  $q^{\mathbb{Z}}$ .



### Orthogonalität

• Ein System von Polynomen  $P_n(x)$ 

$$P_n(x) = k_n x^n + k'_n x^{n-1} + k''_n x^{n-2} + \cdots, \quad k_n \neq 0$$

heißt orthogonal (OPS) bzgl. des positiv definiten Maßes  $d\mu(x)$ , wenn

$$\langle P_m, P_n \rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } m \neq n \\ h_n > 0 & \text{falls } m = n \end{cases}$$



### Orthogonalität

• Ein System von Polynomen  $P_n(x)$ 

$$P_n(x) = k_n x^n + k'_n x^{n-1} + k''_n x^{n-2} + \cdots, \quad k_n \neq 0$$

heißt orthogonal (OPS) bzgl. des positiv definiten Maßes  $d\mu(x)$ , wenn

$$\langle P_m, P_n \rangle = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls } m \neq n \\ h_n > 0 & \text{falls } m = n \end{array} \right.$$



### Klassische "stetige" Familien

Die klassischen OPS können erklärt werden als die Polynomlösungen der Differentialgleichung:

$$\sigma(x)P_n''(x) + \tau(x)P_n'(x) - \lambda_n P_n(x) = 0.$$

$$n = 2$$

liefert 
$$\tau(x) = \varepsilon x + \gamma \varepsilon \neq 0$$

liefert 
$$\sigma(x) = ex^2 + fx + g$$

liefert 
$$\lambda_n = n(e(n-1) + \varepsilon)$$

### Klassische "stetige" Familien

Die klassischen OPS können erklärt werden als die Polynomlösungen der Differentialgleichung:

$$\sigma(x)P_n''(x) + \tau(x)P_n'(x) - \lambda_n P_n(x) = 0.$$

$$n=1$$

$$n = 2$$

liefert 
$$\tau(x) = \varepsilon x + \gamma, \varepsilon \neq 0$$

liefert 
$$\sigma(x) = ex^2 + fx + g$$

liefert 
$$\lambda_n = n(e(n-1) + \varepsilon)$$

### Klassische "stetige" Familien

Die klassischen OPS können erklärt werden als die Polynomlösungen der Differentialgleichung:

$$\sigma(x)P_n''(x) + \tau(x)P_n'(x) - \lambda_n P_n(x) = 0.$$

$$n=1$$

liefert 
$$\tau(x) = \varepsilon x + \gamma, \varepsilon \neq 0$$

liefert 
$$\sigma(x) = ex^2 + fx + g$$

liefert 
$$\lambda_n = n(e(n-1) + \varepsilon)$$

### Klassische "stetige" Familien

Die klassischen OPS können erklärt werden als die Polynomlösungen der Differentialgleichung:

$$\sigma(x)P_n''(x) + \tau(x)P_n'(x) - \lambda_n P_n(x) = 0.$$

liefert 
$$\tau(x) = \varepsilon x + \gamma, \varepsilon \neq 0$$

liefert 
$$\sigma(x) = ex^2 + fx + g$$

liefert 
$$\lambda_n = n(e(n-1) + \varepsilon)$$



# Die Charakterisierung der klassischen orthogonalen Polynome durch Sturm-Liouvillesche Differentialgleichungen

#### PETER LESKY

Nach dieser Festlegung des R(x) existiert nur dann eine Polynomlösung ersten Grades in x, wenn Q(x) selbst ein Polynom ersten Grades in x ist:

$$Q(x) = \varepsilon x + \gamma$$

und eine Polynomlösung zweiten Grades in x nur mit

$$P(x) = e x^2 + f x + g.$$

Setzt man ein beliebiges Polynom n-ten Grades in x in die Differentialgleichung (1') ein und berücksichtigt die soeben bestimmten Koeffizienten, dann findet man durch Vergleich der Koeffizienten von  $x^n$  die Parameterwerte

$$\lambda_n = e \, n \, (n-1) + \varepsilon \, n \,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \,. \tag{2}$$



#### Klassifikation

Die klassischen Systeme können (modulo linearer Transformationen) gemäß folgendem Schema klassifiziert werden (Bochner (1929), Lesky (1962-1)):

• 
$$\sigma(x) = 1$$

$$\bullet$$
  $\sigma(x) = x$ 

• 
$$\sigma(x) = x^2$$

• 
$$\sigma(x) = 1 - x^2$$

Potenzen x<sup>n</sup>

**Hermite**polynome

Laguerrepolynome

Besselpolynome



#### Klassifikation

Die klassischen Systeme können (modulo linearer Transformationen) gemäß folgendem Schema klassifiziert werden (Bochner (1929), Lesky (1962-1)):

• 
$$\sigma(x) = 1$$

$$\bullet$$
  $\sigma(x) = x$ 

• 
$$\sigma(x) = x^2$$

• 
$$\sigma(x) = 1 - x^2$$

Potenzen x<sup>n</sup>

Hermitepolynome

Laguerrepolynome

Besselpolynome



#### Klassifikation

Die klassischen Systeme können (modulo linearer Transformationen) gemäß folgendem Schema klassifiziert werden (Bochner (1929), Lesky (1962-1)):

$$\bullet$$
  $\sigma(x) = 1$ 

$$\bullet$$
  $\sigma(X) = X$ 

• 
$$\sigma(x) = x^2$$

• 
$$\sigma(x) = 1 - x^2$$

Potenzen x<sup>n</sup>

Hermitepolynome

Laguerrepolynome

Besselpolynome



#### Klassifikation

Die klassischen Systeme können (modulo linearer Transformationen) gemäß folgendem Schema klassifiziert werden (Bochner (1929), Lesky (1962-1)):

$$\bullet$$
  $\sigma(x)=0$ 

$$\bullet$$
  $\sigma(x) = 1$ 

$$\bullet$$
  $\sigma(x) = x$ 

• 
$$\sigma(x) = x^2$$

• 
$$\sigma(x) = 1 - x^2$$

Potenzen *x*<sup>n</sup>

Hermitepolynome

Laguerrepolynome

Besselpolynome



#### Klassifikation

Die klassischen Systeme können (modulo linearer Transformationen) gemäß folgendem Schema klassifiziert werden (Bochner (1929), Lesky (1962-1)):

$$\bullet$$
  $\sigma(x)=0$ 

$$\bullet$$
  $\sigma(x) = 1$ 

$$\bullet$$
  $\sigma(x) = x$ 

• 
$$\sigma(x) = 1 - x^2$$

Potenzen *x*<sup>n</sup>

Hermitepolynome

Laguerrepolynome

Besselpolynome



#### Klassifikation

Die klassischen Systeme können (modulo linearer Transformationen) gemäß folgendem Schema klassifiziert werden (Bochner (1929), Lesky (1962-1)):

$$\bullet$$
  $\sigma(x)=0$ 

$$\bullet$$
  $\sigma(x) = 1$ 

$$\bullet$$
  $\sigma(x) = x$ 

$$\bullet$$
  $\sigma(x) = x^2$ 

• 
$$\sigma(x) = 1 - x^2$$

Potenzen x<sup>n</sup>

Hermitepolynome

Laguerrepolynome

Besselpolynome





Hermite, Laguerre, Jacobi und Bessel



#### Die Pearsonsche Differentialgleichung

Die zugehörige Gewichtsfunktion  $\rho(x)$  erfüllt die Pearsonsche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\Big(\sigma(x)\rho(x)\Big)=\tau(x)\rho(x).$$

#### Gewichtsfunktion

Also ist sie gegeben durch

$$\rho(x) = \frac{C}{\sigma(x)} e^{\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx}$$

### Klassische Familien

#### Die Pearsonsche Differentialgleichung

Die zugehörige Gewichtsfunktion  $\rho(x)$  erfüllt die Pearsonsche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\Big(\sigma(x)\rho(x)\Big)=\tau(x)\rho(x).$$

#### Gewichtsfunktion

Also ist sie gegeben durch

$$\rho(x) = \frac{C}{\sigma(x)} e^{\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx} .$$



#### Klassische "diskrete" Familien

Die klassischen "diskreten" OPS können analog erklärt werden als Lösungen der Differenzengleichung (Lesky (1962-2)):

$$\sigma(x) \Delta^2 P_n(x) + \tau(x) \Delta P_n(x) - \lambda_n P_n(x+1) = 0$$

wobei 
$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$
.

#### Folgerungen

$$n = 1$$

liefert 
$$\tau(x) = \varepsilon x + \gamma, \varepsilon \neq 0$$

liefert 
$$\sigma(x) = ex^2 + fx + c$$

liefert 
$$\lambda_n = n(e(n-1) + \varepsilon)$$

#### Klassische "diskrete" Familien

Die klassischen "diskreten" OPS können analog erklärt werden als Lösungen der Differenzengleichung (Lesky (1962-2)):

$$\sigma(x) \Delta^2 P_n(x) + \tau(x) \Delta P_n(x) - \lambda_n P_n(x+1) = 0$$

wobei  $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ .

### Folgerungen

liefert 
$$\tau(x) = \varepsilon x + \gamma, \varepsilon \neq 0$$

liefert 
$$\sigma(x) = ex^2 + fx + a$$

liefert 
$$\lambda_n = n(e(n-1) + \varepsilon)$$



# Über Polynomsysteme, die Sturm-Liouvilleschen Differenzengleichungen genügen

Von

#### PETER LESKY

Wir brauchen daher nur mehr die Differenzengleichung

(3) 
$$(e n^2 + f n + g) \Delta^2 P_{\nu,n} + (\varepsilon n + \gamma) \Delta P_{\nu,n} + \lambda_{\nu} P_{\nu,n+1} = 0$$

zu untersuchen, ob sie ein im erweiterten Sinn Sturm-Liouvillesches Polynomsystem erzeugt.

gleich null ist. Dadurch findet man für die Parameterwerte

(6) 
$$\lambda_{\nu} = -\nu \left[ e(\nu - 1) + \varepsilon \right], \quad \nu = 0, 1, 2, ...$$



#### Klassifikation

Die klassischen diskreten Familien können (modulo linearer Transformationen) gemäß folgendem Schema klassifiziert werden (Lesky (1962-3), Nikiforov, Suslov, Uvarov (1991)):

• 
$$\sigma(x) = 1$$

verschobene Charlierpolynome

$$\bullet$$
  $\sigma(x) = x$ 

Charlier-, Meixner-, Krawtchoukpolynome

• 
$$deg(\sigma(x), x) = 2$$



#### Klassifikation

Die klassischen diskreten Familien können (modulo linearer Transformationen) gemäß folgendem Schema klassifiziert werden (Lesky (1962-3), Nikiforov, Suslov, Uvarov (1991)):

• 
$$\sigma(x) = 1$$

 $x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-n+1)$ verschobene Charlierpolynome

$$\bullet$$
  $\sigma(x) = x$ 

Charlier-, Meixner-, Krawtchoukpolynome

• 
$$deg(\sigma(x), x) = 2$$



#### Klassifikation

Die klassischen diskreten Familien können (modulo linearer Transformationen) gemäß folgendem Schema klassifiziert werden (Lesky (1962-3), Nikiforov, Suslov, Uvarov (1991)):

$$\bullet$$
  $\sigma(x)=0$ 

$$\bullet$$
  $\sigma(x) = 1$ 

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-n+1)$$
  
verschobene Charlierpolynome

$$\bullet$$
  $\sigma(x) = x$ 

Charlier-, Meixner-, Krawtchoukpolynome

• 
$$deg(\sigma(x), x) = 2$$



#### Klassifikation

Die klassischen diskreten Familien können (modulo linearer Transformationen) gemäß folgendem Schema klassifiziert werden (Lesky (1962-3), Nikiforov, Suslov, Uvarov (1991)):

$$\bullet$$
  $\sigma(x) = 0$ 

fallende Faktorielle 
$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

$$\bullet$$
  $\sigma(x) = 1$ 

$$\bullet$$
  $\sigma(x) = x$ 

Charlier-, Meixner-, Krawtchoukpolynome

• 
$$deg(\sigma(x), x) = 2$$

#### Klassifikation

Die klassischen diskreten Familien können (modulo linearer Transformationen) gemäß folgendem Schema klassifiziert werden (Lesky (1962-3), Nikiforov, Suslov, Uvarov (1991)):

•  $\sigma(x) = 0$  fallende Faktorielle  $x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-n+1)$ 

•  $\sigma(x) = 1$  verschobene Charlierpolynome

•  $\sigma(x) = x$  Charlier-, Meixner-, Krawtchouk-polynome

•  $deg(\sigma(x), x) = 2$  Hahnpolynome



# Orthogonale Polynomsysteme als Lösungen Sturm-Liouvillescher Differenzengleichungen

Von

#### Peter Lesky, Innsbruck

Verallgemeinerten Tschebyschewschen Interpolationspolynome,

$$(\mid A\mid <\infty, \mid B\mid <\infty)$$
 wenn  $Q_{n+1}$  quadratisch in  $n$ , die

Polynome von Krawtchouk ( $|A| < \infty$ ,  $|B| < \infty$ ) und die

Verallgemeinerten Elemente der Laguerreschen Matrizen,

$$(\mid A\mid <\infty, B=\infty)$$
 wenn  $Q_{n+1}$  linear in  $n$ , die

Polynome von Charlier,

$$(\mid A\mid <\infty, B=\infty)$$
 wenn  $Q_{n+1}$  eine Konstante ist<sup>8</sup>.



#### Die Pearsonsche Differenzengleichung

Die korrespondierende diskrete Gewichtsfunktion  $\rho(x)$  erfüllt die Pearsonsche Differenzengleichung

$$\Delta\Big(\sigma(x)\rho(x)\Big)=\tau(x)\rho(x)$$
.

#### Gewichtsfunktion

Also ist sie durch das Termverhältnis gegeben:

$$\frac{\rho(X+1)}{\rho(X)} = \frac{\sigma(X) + \tau(X)}{\sigma(X+1)}$$



#### Die Pearsonsche Differenzengleichung

Die korrespondierende diskrete Gewichtsfunktion  $\rho(x)$  erfüllt die Pearsonsche Differenzengleichung

$$\Delta\Big(\sigma(x)\rho(x)\Big)=\tau(x)\rho(x)$$
.

#### Gewichtsfunktion

Also ist sie durch das Termverhältnis gegeben:

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)}.$$



# Überblick

- Prof. Dr. Peter Lesky
- Computeralgebra
- Klassische orthogonale Polynome
- Hypergeometrische Funktionen
- Eigenschaften der klassischen orthogonalen Polynome
- Zeilberger-Algorithmus
- Petkovsek-van Hoeij-Algorithmus
- Lösung von Rekusionsgleichungen durch klassische OPS



#### Die allgemeine hypergeometrische Funktion

Die Potenzreihe

$$_{p}F_{q}\left(\begin{array}{c}a_{1},\ldots,a_{p}\\b_{1},\ldots,b_{q}\end{array}\middle|z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{k}z^{k},$$

deren Summanden  $\alpha_k = A_k z^k$  ein rationales Termverhältnis

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{A_{k+1} z^{k+1}}{A_k z^k} = \frac{(k+a_1)\cdots(k+a_p)}{(k+b_1)\cdots(k+b_q)} \frac{z}{(k+1)}$$

haben, heißt die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion.

### Hypergeometrische Terme

Der Summand  $\alpha_k = A_k z^k$  einer hypergeometrischen Reihe wird hypergeometrischer Term bzgl. k genannt.

#### Gewichtsfunktion der klassischen diskreten OPS

Die Beziehung

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)}$$

besagt daher, dass die Gewichtsfunktion  $\rho(x)$  der klassischen diskreten orthogonalen Polynome ein hypergeometrischer Term bzgl. der Variablen x ist.

### Hypergeometrische Terme

Der Summand  $\alpha_k = A_k z^k$  einer hypergeometrischen Reihe wird hypergeometrischer Term bzgl. k genannt.

#### Gewichtsfunktion der klassischen diskreten OPS

Die Beziehung

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)}$$

besagt daher, dass die Gewichtsfunktion  $\rho(x)$  der klassischen diskreten orthogonalen Polynome ein hypergeometrischer Term bzgl. der Variablen x ist.



### Formel für hypergeometrische Terme

Für die Koeffizienten der verallgemeinerten hypergeometrischen Funktion erhält man unter Benutzung des Pochhammersymbols  $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$  die Formel

$$_{p}F_{q}\left(\begin{array}{c}a_{1},\ldots,a_{p}\\b_{1},\ldots,b_{q}\end{array}\middle|z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_{1})_{k}\cdots(a_{p})_{k}}{(b_{1})_{k}\cdots(b_{q})_{k}}\frac{z^{k}}{k!}$$

#### Potenzreihendarstellungen der klassischen OPS

Aus der Differentialgleichung kann man eine Rekursionsgleichung der Potenzreihenkoeffizienten bestimmen. *Maple* 



#### Formel für hypergeometrische Terme

Für die Koeffizienten der verallgemeinerten hypergeometrischen Funktion erhält man unter Benutzung des Pochhammersymbols  $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$  die Formel

$$_pF_q\left(\begin{array}{c}a_1,\ldots,a_p\\b_1,\ldots,b_q\end{array}\middle|z\right)=\sum_{k=0}^\infty\frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{(b_1)_k\cdots(b_q)_k}\frac{z^k}{k!}$$

#### Potenzreihendarstellungen der klassischen OPS

Aus der Differentialgleichung kann man eine Rekursionsgleichung der Potenzreihenkoeffizienten bestimmen.



#### Formel für hypergeometrische Terme

Für die Koeffizienten der verallgemeinerten hypergeometrischen Funktion erhält man unter Benutzung des Pochhammersymbols  $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$  die Formel

$$_pF_q\left(\begin{array}{c}a_1,\ldots,a_p\\b_1,\ldots,b_q\end{array}\middle|z\right)=\sum_{k=0}^\infty\frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{(b_1)_k\cdots(b_q)_k}\frac{z^k}{k!}$$

#### Potenzreihendarstellungen der klassischen OPS

Aus der Differentialgleichung kann man eine Rekursionsgleichung der Potenzreihenkoeffizienten bestimmen. *Maple* 



### OPS des Hahntableaus als hypergeometrische Funktionen

Mittels dieser Dreitermrekursion, die bereits von Lesky (1962-1) bzw. Lesky (1962-2) angegeben wurde, erhält man beispielsweise für die Laguerrepolynome

$$L_n^{\alpha}(x) = \binom{n+\alpha}{n} {}_1F_1\left(\frac{-n}{\alpha+1} \mid x\right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+\alpha}{n-k} x^k,$$

und die Hahnpolynome sind gegeben durch

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x,N) = {}_{3}F_2\left(\begin{array}{c|c} -n,-x,n+1+\alpha+\beta & 1 \\ \alpha+1,-N & 1 \end{array}\right)$$



### OPS des Hahntableaus als hypergeometrische Funktionen

Mittels dieser Dreitermrekursion, die bereits von Lesky (1962-1) bzw. Lesky (1962-2) angegeben wurde, erhält man beispielsweise für die Laguerrepolynome

$$L_n^{\alpha}(x) = \binom{n+\alpha}{n} {}_1F_1\left( \frac{-n}{\alpha+1} \middle| x \right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+\alpha}{n-k} x^k,$$

und die Hahnpolynome sind gegeben durch

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x,N) = {}_{3}F_2\left(\begin{array}{c|c} -n,-x,n+1+\alpha+\beta & 1 \\ \alpha+1,-N & 1 \end{array}\right)$$



### OPS des Hahntableaus als hypergeometrische Funktionen

Mittels dieser Dreitermrekursion, die bereits von Lesky (1962-1) bzw. Lesky (1962-2) angegeben wurde, erhält man beispielsweise für die Laguerrepolynome

$$L_n^{\alpha}(x) = \binom{n+\alpha}{n} {}_1F_1\left( \left. \frac{-n}{\alpha+1} \right| x \right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+\alpha}{n-k} x^k,$$

und die Hahnpolynome sind gegeben durch

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x,N) = {}_3F_2\left(\begin{array}{c|c} -n,-x,n+1+\alpha+\beta & 1 \\ \alpha+1,-N & 1 \end{array}\right).$$



2. Wir versuchen nun für die Koeffizienten der Differentialgleichung (1") eine Bedingung abzuleiten, die für die Existenz von *orthogonalen* Polynomlösungen aller Grade n (n=0, 1, 2, ...) notwendig ist. Zu diesem Zweck setzen wir die Polynomlösungen

$$y_n(x) = a_{n,0} + a_{n,1} x + \cdots + a_{n,n} x^n, \quad a_{n,n} \neq 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

in die Differentialgleichung (1") ein und vergleichen die Koeffizienten von  $x^k$  (k=0, 1, 2, ..., n-1). Dann folgt bei Festlegung von  $a_{n,n+1}=0$  für die Polynom-koeffizienten  $a_{n,k}$  die Rekursionsformel

$$(n-k)\left[e(n+k-1)+\varepsilon\right]a_{n,k} = (k+1)\left[(k+2)g\,a_{n,k+2} + (kf+\gamma)\,a_{n,k+1}\right],$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$
(3)

(5) 
$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} {n \choose k} \{a_{\nu,k} [k(\varepsilon + ek - e) + \lambda_{\nu}] + a_{\nu,k+1} [k[\varepsilon + e(2k-1) + f] + \gamma + \lambda_{\nu}] + a_{\nu,k+2} [ek^{2} + fk + g] \} = 0. \end{cases}$$

V E R S I T A T

# Überblick

- Prof. Dr. Peter Lesky
- Computeralgebra
- Klassische orthogonale Polynome
- Hypergeometrische Funktionen
- Eigenschaften der klassischen orthogonalen Polynome
- Zeilberger-Algorithmus
- Petkovsek-van Hoeij-Algorithmus
- Lösung von Rekusionsgleichungen durch klassische OPS



#### Beziehungen für klassische orthogonale Polynome

Mit linearer Algebra kann man die Koeffizienten der folgenden Identitäten – ausgedrückt durch die Parameter  $e, f, g, \varepsilon$  und  $\gamma$  – bestimmen (Lesky (1985)):

(**RE**) 
$$x P_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x)$$

(DR) 
$$\sigma(x) P'_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x)$$

(SR) 
$$P_n(x) = \hat{a}_n P'_{n+1}(x) + \hat{b}_n P'_n(x) + \hat{c}_n P'_{n-1}(x)$$

#### Beziehungen für klassische orthogonale Polynome

Mit linearer Algebra kann man die Koeffizienten der folgenden Identitäten – ausgedrückt durch die Parameter  $e, f, g, \varepsilon$  und  $\gamma$  – bestimmen (Lesky (1985)):

(RE) 
$$x P_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x)$$

(DR) 
$$\sigma(x) P'_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x)$$

(SR) 
$$P_n(x) = \hat{a}_n P'_{n+1}(x) + \hat{b}_n P'_n(x) + \hat{c}_n P'_{n-1}(x)$$

#### Beziehungen für klassische orthogonale Polynome

Mit linearer Algebra kann man die Koeffizienten der folgenden Identitäten – ausgedrückt durch die Parameter  $e, f, g, \varepsilon$  und  $\gamma$  – bestimmen (Lesky (1985)):

(RE) 
$$x P_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x)$$

(DR) 
$$\sigma(x) P'_{n}(x) = \alpha_{n} P_{n+1}(x) + \beta_{n} P_{n}(x) + \gamma_{n} P_{n-1}(x)$$

(SR) 
$$P_n(x) = \widehat{a}_n P'_{n+1}(x) + \widehat{b}_n P'_n(x) + \widehat{c}_n P'_{n-1}(x)$$

#### Beziehungen für klassische orthogonale Polynome

Mit linearer Algebra kann man die Koeffizienten der folgenden Identitäten – ausgedrückt durch die Parameter  $e, f, g, \varepsilon$  und  $\gamma$  – bestimmen (Lesky (1985)):

(RE) 
$$x P_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x)$$

(DR) 
$$\sigma(x) P'_{n}(x) = \alpha_{n} P_{n+1}(x) + \beta_{n} P_{n}(x) + \gamma_{n} P_{n-1}(x)$$

(SR) 
$$P_n(x) = \hat{a}_n P'_{n+1}(x) + \hat{b}_n P'_n(x) + \hat{c}_n P'_{n-1}(x)$$

#### Beziehungen für klassische orthogonale Polynome

Mit linearer Algebra kann man die Koeffizienten der folgenden Identitäten – ausgedrückt durch die Parameter  $e, f, g, \varepsilon$  und  $\gamma$  – bestimmen (Lesky (1985)):

(RE) 
$$x P_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x)$$

(DR) 
$$\sigma(x) P'_{n}(x) = \alpha_{n} P_{n+1}(x) + \beta_{n} P_{n}(x) + \gamma_{n} P_{n-1}(x)$$

(SR) 
$$P_n(x) = \hat{a}_n P'_{n+1}(x) + \hat{b}_n P'_n(x) + \hat{c}_n P'_{n-1}(x)$$

# ÜBER POLYNOMLÖSUNGEN VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND DIFFERENZENGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG

Von Peter Lesky, Stuttgart

Unter Verwendung der aus (3) berechenbaren Koeffizienten  $a_{n,n-1}$  und  $a_{n,n-2}$  erhält man allein durch Koeffizientenvergleich

$$y_{n+1}(x) = \left\{ x + \frac{2fn[(n-1)e+\varepsilon] - (2e-\varepsilon)\gamma}{[2ne+\varepsilon][2(n-1)e+\varepsilon]} \right\} y_n(x) +$$

$$+ \frac{n[(n-2)e+\varepsilon]\{(n-1)[(n-1)e+\varepsilon](4eg-f^2) + \varepsilon^2g + e\gamma^2 - \varepsilon\gamma f\}}{[(2n-1)e+\varepsilon][2(n-1)e+\varepsilon]^2[(2n-3)e+\varepsilon]}$$

$$y_{n-1}(x).$$
(5)



Die Klassifikation der gesamten klassischen OPS des Askey-Wilson-Schemas durch Sturm-Liouville-Gleichungen und den Satz von Favard kulminiert schließlich in Peter Leskys Monographie

Eine Charakterisierung der klassischen kontinuierlichen, diskreten und *q*-Orthogonalpolynome, Shaker, 2005, Aachen





# Überblick

- Prof. Dr. Peter Lesky
- Computeralgebra
- Klassische orthogonale Polynome
- Hypergeometrische Funktionen
- Eigenschaften der klassischen orthogonalen Polynome
- Zeilberger-Algorithmus
- Petkovsek-van Hoeij-Algorithmus
- Lösung von Rekusionsgleichungen durch klassische OPS



### Rekursionsgleichungen für hypergeometrische Reihen

Doron Zeilberger (1990) entwickelte einen Algorithmus, um für hypergeometrische Reihen

$$s_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(n,k)$$

holonome Rekursionsgleichungen zu bestimmen.

#### Holonome Rekursionsgleichungen

Eine Rekursionsgleichung heißt holonom, wenn sie homogen und linear ist und Polynomkoeffizienten hat.



### Rekursionsgleichungen für hypergeometrische Reihen

Doron Zeilberger (1990) entwickelte einen Algorithmus, um für hypergeometrische Reihen

$$s_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(n,k)$$

holonome Rekursionsgleichungen zu bestimmen.

### Holonome Rekursionsgleichungen

Eine Rekursionsgleichung heißt holonom, wenn sie homogen und linear ist und Polynomkoeffizienten hat.



### Differentialgleichungen für hypergeometrische Reihen

Ein ähnlicher Algorithmus liefert eine holonome Differentialgleichung für Reihen der Form

$$s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(x,k) .$$

#### Algebra holonomer Differential- bzw. Rekursionsgleichungen

 Holonome Funktionen formen eine Algebra, d. h., Summe und Produkt holonomer Funktionen sind wieder holonom, und es gibt Algorithmen der linearen Algebra, um die zugehörigen Differential- bzw. Rekursionsgleichungen zu bestimmen.



### Differentialgleichungen für hypergeometrische Reihen

Ein ähnlicher Algorithmus liefert eine holonome Differentialgleichung für Reihen der Form

$$s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(x,k) .$$

### Algebra holonomer Differential- bzw. Rekursionsgleichungen

 Holonome Funktionen formen eine Algebra, d. h., Summe und Produkt holonomer Funktionen sind wieder holonom, und es gibt Algorithmen der linearen Algebra, um die zugehörigen Differential- bzw. Rekursionsgleichungen zu bestimmen.

## Zeilberger-Algorithmus

### Anwendung auf orthogonale Polynome

 Als Beispiel wenden wir den Zeilberger-Algorithmus auf die Laguerrepolynome an:

$$L_n^{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+\alpha}{n-k} x^k.$$

• Mit den Algorithmen der holonomen Algebra kann man dann auch leicht Rekursions- und Differentialgleichungen für das Quadrat  $L_n^{\alpha}(x)^2$ , für das Produkt  $L_n^{\alpha}(x) L_m^{\beta}(x)$  oder für die Differenz  $L_{n+1}^{\alpha}(x) - L_n^{\alpha}(x)$  finden.

## Zeilberger-Algorithmus

### Anwendung auf orthogonale Polynome

 Als Beispiel wenden wir den Zeilberger-Algorithmus auf die Laguerrepolynome an:

$$L_n^{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+\alpha}{n-k} x^k.$$

• Mit den Algorithmen der holonomen Algebra kann man dann auch leicht Rekursions- und Differentialgleichungen für das Quadrat  $L_n^{\alpha}(x)^2$ , für das Produkt  $L_n^{\alpha}(x) L_m^{\beta}(x)$  oder für die Differenz  $L_{n+1}^{\alpha}(x) - L_n^{\alpha}(x)$  finden.



## Zeilberger-Algorithmus

### Anwendung auf orthogonale Polynome

 Als Beispiel wenden wir den Zeilberger-Algorithmus auf die Laguerrepolynome an:

$$L_n^{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+\alpha}{n-k} x^k.$$

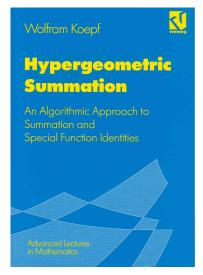
• Mit den Algorithmen der holonomen Algebra kann man dann auch leicht Rekursions- und Differentialgleichungen für das Quadrat  $L_n^{\alpha}(x)^2$ , für das Produkt  $L_n^{\alpha}(x) L_m^{\beta}(x)$  oder für die Differenz  $L_{n+1}^{\alpha}(x) - L_n^{\alpha}(x)$  finden. Maple



Die benutzte Software wurde entwickelt für mein Buch

Hypergeometric Summation, Vieweg, 1998, Braunschweig/ Wiesbaden

und kann von meiner Homepage heruntergeladen werden:



http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf/

Publikationen



### Überblick

- Prof. Dr. Peter Lesky
- Computeralgebra
- Klassische orthogonale Polynome
- Hypergeometrische Funktionen
- Eigenschaften der klassischen orthogonalen Polynome
- Zeilberger-Algorithmus
- Petkovsek-van Hoeij-Algorithmus
- Lösung von Rekusionsgleichungen durch klassische OPS



## Lösung holonomer Rekursionsgleichungen durch hypergeometrische Terme

- Marko Petkovsek (1992) entwickelte einen Algorithmus zur Bestimmung aller Lösungen einer holonomen Rekursionsgleichung durch hypergeometrische Terme.
- Dieser Algorithmus ist nicht sehr effizient, aber er algorithmisiert die Darstellung hypergeometrischer Reihen

$$s_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(n, k)$$
 wie z. B.  $\sum_{k=0}^{n} {n \choose k}^2$  durch hypergeometrische Terme.



## Lösung holonomer Rekursionsgleichungen durch hypergeometrische Terme

- Marko Petkovsek (1992) entwickelte einen Algorithmus zur Bestimmung aller Lösungen einer holonomen Rekursionsgleichung durch hypergeometrische Terme.
- Dieser Algorithmus ist nicht sehr effizient, aber er algorithmisiert die Darstellung hypergeometrischer Reihen

$$s_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(n, k)$$
 wie z. B.  $\sum_{k=0}^{n} {n \choose k}^2$  durch hypergeometrische Terme.



## Lösung holonomer Rekursionsgleichungen durch hypergeometrische Terme

- Marko Petkovsek (1992) entwickelte einen Algorithmus zur Bestimmung aller Lösungen einer holonomen Rekursionsgleichung durch hypergeometrische Terme.
- Dieser Algorithmus ist nicht sehr effizient, aber er algorithmisiert die Darstellung hypergeometrischer Reihen

$$s_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(n, k)$$
 wie z. B.  $\sum_{k=0}^{n} {n \choose k}^2$  durch hypergeometrische Terme.



## Lösung holonomer Rekursionsgleichungen durch hypergeometrische Terme

- Marko Petkovsek (1992) entwickelte einen Algorithmus zur Bestimmung aller Lösungen einer holonomen Rekursionsgleichung durch hypergeometrische Terme.
- Dieser Algorithmus ist nicht sehr effizient, aber er algorithmisiert die Darstellung hypergeometrischer Reihen

$$s_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(n, k)$$
 wie z. B.  $\sum_{k=0}^{n} {n \choose k}^2$  durch hypergeometrische Terme.



### Überblick

- Prof. Dr. Peter Lesky
- Computeralgebra
- Klassische orthogonale Polynome
- Hypergeometrische Funktionen
- Eigenschaften der klassischen orthogonalen Polynome
- Zeilberger-Algorithmus
- Petkovsek-van Hoeij-Algorithmus
- Lösung von Rekusionsgleichungen durch klassische OPS



## Klassische OPS-Lösungen holonomer Rekursionsgleichungen

### Der inverse Algorithmus

- Vorher hatten wir gezeigt, wie die Koeffizienten der Rekursionsgleichung direkt durch die Koeffizienten der Differential- / Differenzengleichung ausgedrückt werden können.
- Nutzt man diese Formeln nun in der anderen Richtung, so kann aus der Rekursionsgleichung die zugehörige Differential- / Differenzengleichung ermittelt werden.
- Hierzu muss ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden.



## Klassische OPS-Lösungen holonomer Rekursionsgleichungen

### Der inverse Algorithmus

- Vorher hatten wir gezeigt, wie die Koeffizienten der Rekursionsgleichung direkt durch die Koeffizienten der Differential- / Differenzengleichung ausgedrückt werden können.
- Nutzt man diese Formeln nun in der anderen Richtung, so kann aus der Rekursionsgleichung die zugehörige Differential- / Differenzengleichung ermittelt werden.
- Hierzu muss ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden.



## Klassische OPS-Lösungen holonomer Rekursionsgleichungen

### Der inverse Algorithmus

- Vorher hatten wir gezeigt, wie die Koeffizienten der Rekursionsgleichung direkt durch die Koeffizienten der Differential- / Differenzengleichung ausgedrückt werden können.
- Nutzt man diese Formeln nun in der anderen Richtung, so kann aus der Rekursionsgleichung die zugehörige Differential- / Differenzengleichung ermittelt werden.
- Hierzu muss ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden.



# Klassische OPS-Lösungen von Rekursionsgleichungen

#### **Beispiel**

Sei die Rekursion

$$P_{n+2}(x) - (x-n-1) P_{n+1}(x) + \alpha(n+1)^2 P_n(x) = 0$$

gegeben.

• Wir finden heraus, dass die Lösungen dieser Rekursion für  $\alpha=1/4$  verschobene Laguerrepolynome liefern. Für  $\alpha<1/4$  erhalten wir Meixner- und Krawtchoukpolynome als Lösungen. *Maple* 



# Klassische OPS-Lösungen von Rekursionsgleichungen

#### **Beispiel**

Sei die Rekursion

$$P_{n+2}(x) - (x-n-1) P_{n+1}(x) + \alpha(n+1)^2 P_n(x) = 0$$

gegeben.

• Wir finden heraus, dass die Lösungen dieser Rekursion für  $\alpha=1/4$  verschobene Laguerrepolynome liefern. Für  $\alpha<1/4$  erhalten wir Meixner- und Krawtchoukpolynome als Lösungen. *Maple* 



### Herzlichen Dank für Ihr Interesse!

