

Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften

Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

- a) Man bestimme $\int_0^1 f(x) dx$ exakt.
- b) Man berechne mit der Trapezregel einen Näherungswert für $\int_0^1 f(x) dx$.
- c) Man führe eine Fehlerabschätzung für den Näherungswert durch und vergleiche diese mit dem tatsächlichen Fehler.

(4 P)

Aufgabe 2

Zur Berechnung eines Extremums der Funktion

$$f(x, y) = (x - 1)^4 + 2(x - 1)^2(y + 1)^2 + (y + 1)^4 - 2(x - 1)^2 - 2(y + 1)^2 + 1$$

soll das Newton-Verfahren auf

$$\mathbf{F}(x, y) := (\text{grad} f(x, y))^T = 0$$

angewendet werden.

- a) Man berechne $\mathbf{F}(x, y)$ und die Jacobimatrix $\mathbf{JF}(x, y)$.
- b) Man stelle das Newton-Verfahren auf und starte es mit $\mathbf{x}^0 = (1.21, -1.15)^T$. Als Abbruchkriterium verwende man $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|_\infty < 10^{-4}$.
- c) Man klassifiziere das gefundene Extremum.
- d) Man erstelle einen Funktionsplot von f im Bereich $[-0.2, 2.2] \times [-2.2, 0.2]$.

(4 P)

Aufgabe 3

Man zeige, dass das Newton-Verfahren

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \left(\mathbf{J} \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \right)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$$

zur Bestimmung einer Nullstelle von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ gegenüber Umskalierungen der Form:

a) $\mathbf{h}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{A}\mathbf{y})$

b) $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$

invariant ist. Dabei seien \mathbf{A} und \mathbf{B} reguläre Matrizen.

(4 P)

Abgabe: Freitag, 22.06.2001 in der Vorlesung