Fachbereich Mathematik **SoSe 2001**
Dr. Andreas Meister
Dr. Michael Breuss

Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \beta \\ 16 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche Werte von α und β besitzt dieses Gleichungssystem
   (i) eine eindeutige Lösung,
   (ii) keine Lösung,
   (iii) unendlich viele Lösungen ?

b) Für den Fall, dass $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ eindeutig lösbar ist, gebe man die Lösung in Abhängigkeit von den Parametern α, β an.

c) Man gebe eine Lösungsdarstellung für den Fall (iii) von unendlich vielen Lösungen an.

d) Welchen Wert hat $\det \boldsymbol{A}$?

(4 P)

Aufgabe 2

Es sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie

$$\boldsymbol{A}^j \to \boldsymbol{0}, \quad j \to \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho(\boldsymbol{A}) < 1$$

(4 P)

Aufgabe 3
Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & -2t & t & 4+t \\ -4t & -4 & 2-2t & 8t \\ 6 & -6 & 3+t & -9+t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(4,4)}/\mathbb{C}^{(4,4)}$$

und die rechte Seite $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(t) = (1, 0, 2, 3 - t^2)^T$.

a) Man wende das Gaußsche Eliminationsverfahren auf das Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ an (ohne Rücksubstitution, Dreiecksform genügt!).

b) Man bestimme in Abhängigkeit von t den Rang der Matrix $\boldsymbol{A}(t)$ sowie die Dimension des Lösungsraums des homogenen linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$.

Für $t = 0$ gebe man eine Basis von Kern $\boldsymbol{A}$ an.

c) Für welche Werte von t ist das inhomogene Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ lösbar?

(4 P)

Aufgabe 4
Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix} .$$

a) Bestimmen Sie $\|\boldsymbol{A}\|_\infty, \|\boldsymbol{A}\|_1$ und $\|\boldsymbol{A}\|_F$.

b) Zeigen Sie, dass die Matrix singulär und positiv semi-definit ist.

c) Bestimmen Sie $\rho(\boldsymbol{A})$.

(4 P)

Abgabe: **Freitag, 20.04.2001 in der Vorlesung**