Fachbereich Mathematik **SoSe 2001**
Dr. Andreas Meister
Dr. Michael Breuss

Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften

Aufgabenblatt 4

Allgemeiner Hinweis:
Ein lineares und zur regulären Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ konsistentes Iterationsverfahren

$$\boldsymbol{x}_m = \phi(\boldsymbol{x}_{m-1}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_{m-1} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{b}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

konvergiert genau dann für einen beliebigen Startvektor $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ gegen die Lösung $\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wenn

$$\rho(\boldsymbol{M}) < 1$$

gilt.

Aufgabe 1
Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{7}{8}\cos\frac{\pi}{4} & \frac{7}{8}\sin\frac{\pi}{4} \\ -\frac{7}{8}\sin\frac{\pi}{4} & 1 - \frac{7}{8}\cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

und der Vektor

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß das lineare Iterationsverfahren

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{b}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

für beliebigen Starvektor $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ gegen die eindeutig bestimmte Lösung $\boldsymbol{x} = (0,0)^T$ konvergiert, obwohl eine Matrixnorm mit

$$\|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\| > 1$$

existiert. Veranschaulichen Sie beide Sachverhalte zudem graphisch. (4 P)

Aufgabe 2

Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die linearen Iterationsverfahren

$$\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{M}_\psi \boldsymbol{x} + \boldsymbol{N}_\psi \boldsymbol{b}$$

und

$$\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{M}_\phi \boldsymbol{x} + \boldsymbol{N}_\phi \boldsymbol{b}$$

nicht konvergieren und die Produktiteration

$$(\psi \circ \phi)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = \psi(\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}), \boldsymbol{b})$$

konvergiert. (4 P)

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x) = 3(x - \ln x) - \frac{13}{4}.$$

a) Man zeige, dass f genau zwei Nullstellen besitzt.

b) Man berechne die beiden Nullstellen von f mit Hilfe des Fixpunktverfahrens, wobei die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes jeweils zu überprüfen sind.

c) Für die berechnete Näherung x_{10} führe man jeweils eine a priori und eine a posteriori Fehlerabschätzung durch.

(4 P)

Aufgabe 4

Programmieraufgabe: Abgabe Freitag, 11.05.2001 in der Vorlesung

Programieren Sie das Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren. Berechnen Sie mit beiden Verfahren die Näherungslösungen zu den Beispielen

a) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a & 14 \\ 7 & 50 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \left\{\frac{49}{25}\right\}.$

Verwenden Sie jeweils den Startvektor $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ und $a = \frac{1}{2}, 1, 2, 10, 100$. Abzugeben sind:

(i) Das gut kommentierte Programm.

(ii) Im konvergenten Fall jeweils $\boldsymbol{x}_n$ und $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_{n-1}\|_\infty$ für $n = 1, 2, 3, 5, 10, 15, \ldots, 30$.

(iii) Im divergenten Fall eine mathematisch fundierte Begründung für die Divergenz.

(8 P)

Abgabe: Freitag, 04.05.2001 in der Vorlesung