

Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1

Definition: Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt M -Matrix, falls

- a) $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$
- b) $a_{ij} \leq 0$, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$
- c) \mathbf{A} ist regulär mit $\mathbf{A}^{-1} \geq 0$

gilt.

- (1) Geben Sie ein Beispiel für eine M -Matrix an, die keine Diagonalmatrix darstellt.
- (2) Zeigen Sie für eine M -Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$:
 - a) Sei $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ und $\mathbf{Ax}' = \mathbf{b}'$, dann folgt aus $\mathbf{b} \leq \mathbf{b}'$ auch $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}'$.
 - b) Für die zu \mathbf{A} gehörige Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens gilt

$$\mathbf{M}_J \geq 0$$

und

$$\rho(\mathbf{M}_J) < 1.$$

Bemerkungen:

Die Relationen $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ respektive $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ sind stets komponentenweise zu verstehen.
Nutzen Sie die Aussage, daß für $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ stets zu $\lambda = \rho(\mathbf{A})$ ein Eigenvektor $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ gehört. (4 P)

Aufgabe 2

Es sei $C[-a, a]$ versehen mit der Maximumnorm und $A : C[-a, a] \rightarrow C[-a, a]$ der Operator, der jeder Funktion $f \in C[-a, a]$ die Funktion $Af = g$ mit

$$g(t) = t + \int_0^t f(s)ds, \quad -a \leq t \leq a$$

zuordnet. Für welches $a > 0$ ist A kontrahierend? Was ist der Fixpunkt von A ? (4 P)

Aufgabe 3

Wir betrachten Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($n \geq 2$) mit $a_{ii} = 1$, $i = 1, \dots, n$ und $a_{ij} = a$ für $i \neq j$.

- a) Wie sieht die Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens zu \mathbf{A} aus? Berechnen Sie ihre Eigenwerte und die Eigenwerte von \mathbf{A} .
- b) Für welche a konvergiert das Jacobi-Verfahren? Für welche a ist \mathbf{A} positiv definit?
- c) Gibt es positiv definite Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für die das Jacobi-Verfahren nicht konvergiert?

(4 P)

Abgabe: Freitag, 11.05.2001 in der Vorlesung