Fachbereich Mathematik **SoSe 2001**
Dr. Andreas Meister
Dr. Michael Breuss

Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1

Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 & 4 \\ 4 & 18 & 17 & 16 \\ 6 & 25 & 24 & 21 \\ 4 & 14 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie $\det \boldsymbol{A}[k] \neq 0$ für $k = 1, 2, 3, 4$.

b) Bestimmen Sie die Matrizen

$$\boldsymbol{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \ell_{31} & 0 & 1 & 0 \\ \ell_{41} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \qquad \boldsymbol{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ell_{32} & 1 & 0 \\ 0 & \ell_{42} & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4},$$

$$\boldsymbol{L}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ell_{43} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad \text{und} \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

derart, dass

$$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{L}_3\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}$$

gilt.

c) Berechnen Sie

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 22 \\ 29 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

(4 P)

Aufgabe 2

Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

soll mit dem Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren gelöst werden. Wieviele Iterationen sind jeweils ungefähr erforderlich, um den Fehler $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\|_2$ um den Faktor 10^{-6} zu reduzieren? (4 P)

Aufgabe 3

a) Es sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regulär und es gelte $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{R}$, wobei $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär ist und $\boldsymbol{R} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix darstellt. Es bezeichne $\boldsymbol{a}_j \in \mathbb{C}^n$ bzw. $\boldsymbol{q}_j \in \mathbb{C}^n$ den j-ten Spaltenvektor von $\boldsymbol{A}$ bzw. $\boldsymbol{Q}$, $j = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_j\} \quad \text{für alle} \quad j = 1, \ldots, n.$$

b) Berechnen Sie eine QR-Zerlegung der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

und lösen Sie unter Verwendung der QR-Zerlegung das Gleichungssystem

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(4 P)

Aufgabe 4

Programmieraufgabe: Abgabe Freitag, 25.05.2001 in der Vorlesung

Schreiben Sie in einer der höheren Programmiersprachen ein Programm, das das Gaußsche Eliminationsverfahren (GEV mit Spaltenpivotsuche) durchführt. Das Programm soll

(i) das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösen, wobei $\boldsymbol{A}$ eine reelle $n \times n$-Matrix ist und $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ sind.

(ii) die Determinante $\det(\boldsymbol{A})$ liefern.

(iii) die LU-Zerlegung der Matrix $\boldsymbol{PA}$ in einer $n \times n$-Matrix $\boldsymbol{LU}$ abspeichern ($\boldsymbol{L}$ unterhalb der Diagonalen von $\boldsymbol{LU}$, $\boldsymbol{U}$ oberhalb und auf der Diagonalen von $\boldsymbol{LU}$). $\boldsymbol{P}$ ist die Permutationsmatrix, die die Zeilenvertauschungen ausführt, welche im Verlauf der Rechnung auftraten.

Abzugeben ist das ausführliche dokumentierte Programm mit den Rechenergebnissen folgender Beispiele:

a) $$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 8 \\ 2 & -6 & -4 & 2 \\ 3 & -8 & 1 & -4 \\ 4 & 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.55 \\ 7.35 \\ -3.35 \\ -4.55 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 21.547 & -95.510 & -96.121 \\ 10.223 & -91.065 & 7.343 \\ 51.218 & 12.269 & 86.457 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -49.93 \\ -12.465 \\ 60.812 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 100 & 1 \\ 1 & 1.00001 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00001 \\ 1.01 \end{pmatrix}$$

d) $$\begin{pmatrix} 100 & 1 \\ 10^{-2} & 1.00001 \cdot 10^{-14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00001 \\ 1.01 \cdot 10^{-12} \end{pmatrix}$$

(8 P)

Abgabe: Freitag, 18.05.2001 in der Vorlesung