

# Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften

## Aufgabenblatt 7

### Aufgabe 1

Gegeben sei eine stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{sign}[f(a)] \neq \text{sign}[f(b)]$  für zwei reelle Zahlen  $a$  und  $b$ . Dabei gelte  $f(a) \neq 0 \neq f(b)$ . Vorgegeben sei der folgende Algorithmus:

```
Solange ( $|b - a| > \text{eps}$ ) wiederhole
{
     $c = (a + b)/2$ ;
    wenn ( $c = a$  oder  $c = b$ )
        Abbruch;
     $fc = f(c)$ ;
    wenn ( $fc = 0$ )
    {
         $a = b = c$ ;
         $fa = fb = fc$ ;
        Abbruch;
    }
    wenn ( $\text{sign}(fc) \neq \text{sign}(fb)$ )
    {
         $a = c$ ;
         $fa = fc$ ;
    }
    sonst
    {
         $b = c$ ;
         $fb = fc$ ;
    }
}
```

Dabei ist  $\text{eps} \geq 0$  vorzugeben, ebenso zwei Werte  $a$  und  $b$  sowie die entsprechenden Funktionswerte  $fa$  und  $fb$ .

- Was leistet der gegebene Algorithmus?
- Sei  $\text{eps} \ll 1$  vorgegeben. Erläutere die Situation, die sich durch das Weglassen der Zeilen

```
wenn ( $c = a$  oder  $c = b$ )
    Abbruch;
```

ergeben kann!

ist nach  $k$  Iterationsschritten das entsprechende Intervall  $L_k$ ?

- d) Sei  $L_0 = 1$  und es sei  $\text{eps} = 10^{-6}$ . Wieviele Durchläufe benötigt der vorliegende Algorithmus bis zur Konvergenz im Sinne des Abbruchfehlers?

(4 P)

## Aufgabe 2

Veranschauliche die Vorgehensweise des Newton-Verfahrens anhand der folgenden Beispiele. Untersuche zudem die Abhängigkeit der Konvergenz des Verfahrens vom zu wählenden Startwert  $x_0$ . Zusätzlich sind jeweils die ersten fünf Iterierten des Newton-Verfahrens auf die sechste Nachkommastelle genau anzugeben.

a)  $f(x) = \frac{1}{2} - 2$ ,  $x_0 = \frac{1}{4}$ .

b)  $f(x) = x^2 - 2$ ,  $x_0 = 1$ .

(4 P)

## Aufgabe 3

- a) Man zeige, dass das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen der durch

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 2)$$

gegebenen Funktion für den Startwert  $x_0 = 1$  nicht konvergiert und veranschauliche diesen Sachverhalt auch graphisch.

- b) Für den Startwert  $x_0 = 1$  gebe man die Newton-Folge für die durch

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + x - 1$$

gegebenen Funktion an und begründe auch anhand einer Skizze, warum das Newton-Verfahren nicht konvergiert.

(4 P)

## Aufgabe 4

Gegeben sei  $f(x) = \frac{1}{x} - 10^{-10}$ ,  $x_0 = 10^{-10}$ .

Bestimme per Hand die ersten fünf Iterierten des Newton-Verfahrens unter Einschränkung auf die ersten zwölf Nachkommastellen. Schätze die Anzahl der Schritte ab, die das Newton-Verfahren durchlaufen muß, um eine Iterierte im Gültigkeitsbereich der quadratischen Konvergenz zu erhalten.

(4 P)

**Abgabe: Freitag, 25.05.2001 in der Vorlesung**