

Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{g} \quad \text{mit } g = f'(x_0).$$

Das im folgenden betrachtete Iterationsverfahren zur Bestimmung von x_* mit $f(x_*) = 0$ sei durch

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

definiert. Man leite mit Hilfe von (sinnvoll abgebrochenen) Taylor-Entwicklungen eine Konvergenzaussage ab. Dabei stelle man gegebenenfalls zusätzlich benötigte Bedingungen auf, die die Konvergenz des Verfahrens gewährleisten. (4 P)

Aufgabe 2

Man leite für $k \rightarrow \infty$ eine asymptotische Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens aus Aufgabe 1 her. Für die unterschiedlichen Werte

$$\varphi'(x_*) = \{0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99\}$$

schätzt man ab, wieviele Iterationsschritte das Verfahren benötigt, um den Fehler um den Faktor ϵ mit $\epsilon = \{10^{-5}, 10^{-10}, 10^{-15}\}$ zu verkleinern. (4 P)

Aufgabe 3

Sei x_* Grenzwert der jeweils betrachteten Folge.

- a) Man gebe ein Beispiel für eine gegen Null konvergierende Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ an, für die

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x_*|}{|x_k - x_*|} = 1$$

gilt.

- b) Man gebe ein Beispiel für eine gegen Null konvergierende Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ an, für die

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x_*|}{|x_k - x_*|^p} = 0$$

für $p = 1$, aber nicht für $p > 1$ gilt.

(4 P)

Aufgabe 4

Programmieraufgabe: Abgabe Freitag, 15.06.2001 in der Vorlesung

Man schreibe ein Programm zur Newton-Interpolation unter Benutzung des Horner-Schemas. Gegeben sei dann die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \quad \text{mit } x \in [a, b].$$

- a) Man benutze die Daten $(x_0, x_0), \dots, (x_n, f_n)$ an den $(n + 1)$ Stellen

$$x_j = a + j \cdot \frac{b - a}{n}, \quad j = 0, \dots, n, \quad \text{mit } a = -1, b = 1.$$

Man stelle die Funktion f zusammen mit den Interpolationspolynomen $P_n(x)$ zu den genannten Daten für $n = 4, 8, 12, 16$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ graphisch dar.

- b) Man benutze nun die durch

$$x_j = \cos\left(\frac{2(n-j)+1}{2n+2}\pi\right), \quad j = 0, \dots, n,$$

definierten Stützstellen und wiederhole die Schritte aus a).

- c) Man erkläre die auftretenden Phänomene anhand der Formel aus der Vorlesung für den Fehler des Interpolationspolynoms. Wenn möglich, vergleiche man die Fehler aus a) und b) graphisch.

(4 P)

Abgabe: Freitag, 15.06.2001 in der Vorlesung