Fachbereich Mathematik **SoSe 2001**
Dr. Andreas Meister
Dr. Michael Breuss

Numerische Mathematik für Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Lehrämter und der Naturwissenschaften

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{g} \quad \text{mit } \; g = f'(x_0)\,.$$

Das im folgenden betrachtete Iterationsverfahren zur Bestimmung von x_* mit $f(x_*) = 0$ sei durch

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

definiert. Man leite mit Hilfe von (sinnvoll abgebrochenen) Taylor-Entwicklungen eine Konvergenzaussage ab. Dabei stelle man gegebenenfalls zusätzlich benötigte Bedingungen auf, die die Konvergenz des Verfahrens gewährleisten. (4 P)

Aufgabe 2

Man leite für $k \to \infty$ eine asymptotische Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens aus Aufgabe 1 her. Für die unterschiedlichen Werte

$$\varphi'(x_*) = \{0.01, 0.1, 0.5, 0.9, 0.99\}$$

schätze man ab, wieviele Iterationsschritte das Verfahren benötigt, um den Fehler um den Faktor ϵ mit $\epsilon = \{10^{-5}, 10^{-10}, 10^{-15}\}$ zu verkleinern. (4 P)

Aufgabe 3

Sei x_* Grenzwert der jeweils betrachteten Folge.

a) Man gebe ein Beispiel für eine gegen Null konvergierende Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ an, für die

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x_*|}{|x_k - x_*|} = 1$$

gilt.

b) Man gebe ein Beispiel für eine gegen Null konvergierende Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ an, für die

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x_*|}{|x_k - x_*|^p} = 0$$

für $p = 1$, aber nicht für $p > 1$ gilt.

(4 P)

Aufgabe 4

Programmieraufgabe: Abgabe Freitag, 15.06.2001 in der Vorlesung

Man schreibe ein Programm zur Newton-Interpolation unter Benutzung des Horner-Schemas. Gegeben sei dann die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \quad \text{mit } x \in [a,b]\,.$$

a) Man benutze die Daten $(x_0, x_0), \ldots, (x_n, f_n)$ an den $(n+1)$ Stellen

$$x_j = a + j \cdot \frac{b-a}{n}, \qquad j = 0, \ldots, n, \quad \text{mit } a = -1\,,\ b = 1\,.$$

Man stelle die Funktion f zusammen mit den Interpolationspolynomen $P_n(x)$ zu den genannten Daten für $n = 4, 8, 12, 16$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ graphisch dar.

b) Man benutze nun die durch

$$x_j = \cos\left(\frac{2(n-j)+1}{2n+2}\pi\right), \quad j = 0, \ldots, n,$$

definierten Stützstellen und wiederhole die Schritte aus a).

c) Man erkläre die auftretenden Phänomene anhand der Formel aus der Vorlesung für den Fehler des Interpolationspolynoms. Wenn möglich, vergleiche man die Fehler aus a) und b) graphisch.

(4 P)

Abgabe: Freitag, 15.06.2001 in der Vorlesung