Numerik II für Ingenieure (Höhere Mathematik IV)

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1
Bestimmen Sie die Fourier-Reihen der periodischen Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \,, \\ 0, & x \in [-\pi, \pi] \setminus [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \,. \end{cases}$$

mit $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass für die Fourier-Reihenentwicklung einer L-periodischen, stückweise glatten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(L > 0)$, die Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{L} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{L} x\right) \right)$$

mit

$$a_k = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2k\pi}{L} x\right) \, dx$$

$$b_k = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2k\pi}{L} x\right) \, dx$$

gilt.
Hinweis: Transformieren Sie die Funktionen auf eine 2π-periodische Funktion und nutzen Sie die bekannte Darstellung der Fourier-Koeffizienten für 2π-periodische Funktionen.

Aufgabe 3
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x \cos x|$ für alle $x \in [-\pi, \pi[$ und $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

a) Man zeichne die Funktion f im Intervall $[-\pi, \pi[$.

b) Man berechne die Fourier-Reihe der Funktion.

Aufgabe 4
Gegeben sei die 2-periodische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -1 \leq x \leq 0 \quad , \\ 1-x & , \quad 0 \leq x < 1 \quad , \\ f(x+2) = f(x) & , \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a) Man berechne die Fourier-Reihe der Funktion.

b) Man zeige mit Hilfe von a) die Identität $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Abgabe: **Freitag, 13.05.05 in der Vorlesung**
Besprechung: **Freitag, 20.05.05**