

Numerik II für Ingenieure (Höhere Mathematik IV)

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \quad -\pi \leq x \leq 0 \quad , \\ x^2 & , \quad 0 < x < \pi \quad , \\ f(x + 2\pi) = f(x) & , \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- a) Man berechne die komplexe Fourier-Reihe der Funktion.
- b) Man gebe die reellen Fourier-Koeffizienten der Reihe aus a) an.

Aufgabe 2

- a) Die Folge (t_n) sei durch das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von $f(t) = t^2 - 2$ mit Startwert $t_0 = 1$ festgelegt.
Man zeige, dass (t_n) gegen $t^* = \sqrt{2}$ konvergiert. Ferner zeige man die quadratische Konvergenz der Folge.
Hinweis: Führen Sie eine vollständige Induktion durch und nutzen Sie die Bernoullische Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$, siehe auch Mathematik I Skript von Frau Jeltsch-Fricker, S. 98.
- b) Man führe die ersten fünf Schritte des Newton-Verfahrens für $f(t)$ und zum Vergleich fünf Schritte des Bisektionsverfahrens mit Startintervall $[1, 2]$ durch.

Aufgabe 3

- a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 12$.
Man führe die ersten 10 Iterationen des Bisektionsverfahrens, ausgehend vom Startintervall $[0, 4]$, durch und gebe die berechnete Folge von Intervallen in einer Tabelle an. Ausgehend vom Startwert $x_0 = 4$ berechne man zudem die ersten 5 Iterierten des Newton-Verfahrens und stelle sie den Werten des Bisektionsverfahrens gegenüber.
- b) Man zeige, dass das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen der durch

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 2)$$

gegebenen Funktion für den Startwert $x_0 = 1$ nicht konvergiert und veranschauliche diesen Sachverhalt auch graphisch.

c) Für den Startwert $x_0 = 1$ gebe man die Newton-Folge für die durch

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + x - 1$$

gegebenen Funktion an und begründe auch anhand einer Skizze, warum das Newton-Verfahren nicht konvergiert.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie das Bisektionsverfahren bei Vorgabe der Anfangswerte a_1 und b_1 für die jeweilige Funktion f auf Konvergenz gegen die angegebenen Nullstelle x_* . Im Fall der Konvergenz geben Sie die kleinstmögliche natürliche Zahl n an, für die

$$|p_n - x_*| < 10^{-6}$$

ohne Verwendung der Kenntnis über den expliziten Wert der Nullstelle garantiert werden kann. Verwenden Sie hierzu Satz 3.4.

- a) $f(x) = x - \pi$, $x_* = \pi$, $a_1 = 2$, $b_1 = 4$,
- b) $f(x) = x^2 - 4$, $x_* = 2$, $a_1 = -5$, $b_1 = 5$,
- c) $f(x) = x^3 - 6\pi x^2 + 11\pi^2 x - 6\pi^3$, $x_* = 2\pi$, $a_1 = 0$, $b_1 = 10$.

Abgabe: Freitag, 3.06.05 in der Vorlesung

Besprechung: Freitag, 10.06.05