

Numerik II für Ingenieure (Höhere Mathematik IV)

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für die Stützstellen

$$\begin{array}{c|ccc} k & 0 & 1 & 2 \\ \hline x_k & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

das Interpolationspolynom $p \in \Pi_2$ mit $p(x_k) = f_k$, $k = 0, 1, 2$ mittels

- dem naiven Ansatz
(d.h. dem Lösen des zugehörigen Gleichungssystems)
- der Lagranges Interpolationsformel

für die beiden Fälle

$$\begin{array}{c|ccc} k & 0 & 1 & 2 \\ \hline f_k & 1 & 5 & 29 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|ccc} k & 0 & 1 & 2 \\ \hline f_k & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Aufgabe 2

- Berechnen Sie das Interpolationspolynom $p \in \Pi_2$ zur Funktion $f(x) = 2^x - x^3 + 3.5(x^2 - x)$ bezüglich der Stellen

$$\begin{array}{c|ccc} k & 0 & 1 & 2 \\ \hline x_k & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

- Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^x$.

- Man bestimme $\int_0^1 f(x) dx$ exakt.
- Man berechne einen Näherungswert für $\int_0^1 f(x) dx$ mittels der Rechteckregel, Trapezregel, Simpson-Regel, Newtonschen 3/8-Regel und Milne-Regel.
- Vergleichen Sie den Fehler zwischen der exakten Lösung und der Näherungslösung für alle obigen Ergebnisse.

Aufgabe 3

Gegeben seien die Werte

$$\begin{aligned} x_0 &= 100 \quad \text{mit} \quad p(x_0) = -1, \\ x_1 &= 101 \quad \text{mit} \quad p(x_1) = 2 \\ \text{und} \quad x_2 &= 102 \quad \text{mit} \quad p(x_2) = -1. \end{aligned}$$

Gesucht ist das quadratische Interpolationspolynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ zu den gegebenen Werten.

- a) Schreiben Sie die resultierenden Gleichungen als lineares Gleichungssystem.
- b) Lösen Sie das entstandene Gleichungssystem durch Gauß-Elimination.
- c) Wiederholen Sie die Schritte aus a) und b) für das Interpolationspolynom in der Form $p(x) = b_0 + b_1(x - x_2) + b_2(x - x_2)^2$.

Aufgabe 4

Man entwickle eine Quadraturformel Q

$$Q(f) = g_0 f(x_0) + g_1 f(1) \approx \int_0^1 f(x) dx,$$

die Polynome von möglichst hohem Grad exakt integriert.

Abgabe: Freitag, 24.6.05 in der Vorlesung

Besprechung: Freitag, 1.7.05