Universität Kassel
Prof. Dr. A. Meister

Fachbereich Mathematik
6. August 2007

Klausur zur Vorlesung
Numerik für Ingenieure (Höhere Mathematik IV)
Sommersemester 2007

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60

Aufgabe 1: (10 Punkte)
Gegeben sei das Butcher-Array

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

1. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des zugehörigen Runge-Kutta-Verfahrens in Abhängigkeit vom Parameter $\gamma > 0$ für die Ordnungsstufen $p = 1, 2$ und 3. .
2. Erstellen Sie das zum Butcher-Array gehörende Verfahren für die Wahl $\gamma = 0$.

Aufgabe 2: (10 Punkte)
Wir betrachten lineare Gleichungssysteme der Form $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

1. Geben sei die Matrix
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}.$$
Stellen Sie die zugehörige Iterationsvorschrift
$$\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_{m-1} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{b}$$
für das Jacobi-Verfahren auf und untersuchen Sie das Jacobi-Verfahren auf Konvergenz.
2. Untersuchen Sie das Gauß-Seidel-Verfahren auf Konvergenz für die Matrix
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: **(10 Punkte)**

1. Man berechne die $\boldsymbol{LR}$-Zerlegung der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 11 \\ 2 & 14 & 31 \end{pmatrix}.$$

   und löse hiermit das lineare Gleichungssystem

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ 31 \\ 82 \end{pmatrix}.$$

2. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ 6 & 15 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ \beta \end{pmatrix} \quad .$$

   (a) Für welche Werte von α und β besitzt dieses Gleichungssystem
      (i) eine eindeutige Lösung,
      (ii) keine Lösung,
      (iii) unendlich viele Lösungen ?

   (b) Für den Fall, dass $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ eindeutig lösbar ist, gebe man die Lösung in Abhängigkeit von den Parametern α, β an.

Aufgabe 4: **(10 Punkte)**

Berechnen Sie das Interpolationspolynom $p \in \Pi_2$ zur Funktion $f(x) = x^4 - 2x^3$ bezüglich der Stellen

k	0	1	2
x_k	1	2	3

Schätzen Sie den Fehler $|f(-1) - p(-1)|$ möglichst genau ab.

Aufgabe 5: **(10 Punkte)**

Ermitteln Sie einen quadratischen Spline s auf dem Intervall $[1,2]$ derart, dass der Spline interpolierend bezüglich der Stützpunkte

k	0	1	2
x_k	0	1	2
f_k	2	3	8

ist und zudem

$$s'(0) = 0$$

erfüllt.

Bemerkung:

Ein Spline s heißt quadratisch, wenn auf jedem Teilintervall $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n$

$$s \in \Pi_2$$

gilt und s auf $]x_0, x_n[$ stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 6: **(10 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = xe^x$.

1. Man berechne mit der Simpson-Regel einen Näherungswert für $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.
2. Man führe eine Fehlerabschätzung für den Näherungswert durch.
   Hierbei darf vernachlässigt werden, dass die Simpson-Regel I_n als abgeschlossene Newton-Cotes-Quadraturformel mit geradem n formal den Genauigkeitsgrad $n+1$ besitzt.