Universität Kassel
Prof. Dr. A. Meister Fachbereich Mathematik
8. Oktober 2007

Wiederholungsklausur zur Vorlesung
Numerik für Ingenieure (Höhere Mathematik IV)
Sommersemester 2007

Gesamtzahl der Aufgaben: 5, Gesamtpunktzahl: 50

Aufgabe 1: (10 Punkte)

1. Man berechne die $\boldsymbol{LR}$-Zerlegung der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 18 & 3 & 3 \\ 27 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

und löse hiermit das lineare Gleichungssystem

$$\boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} 35 \\ 72 \\ 104 \end{pmatrix}.$$

2. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix} \qquad .$$

(a) Für welche Werte von α und β besitzt dieses Gleichungssystem
  (i) eine eindeutige Lösung,
  (ii) keine Lösung,
  (iii) unendlich viele Lösungen ?

(b) Für den Fall, dass $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ eindeutig lösbar ist, gebe man die Lösung in Abhängigkeit von den Parametern α, β an.

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Berechnen Sie das Interpolationspolynom $p \in \Pi_2$ zur Funktion $f(x) = 2^x - x^3 + 3.5(x^2 - x)$ bezüglich der Stellen

k	0	1	2
x_k	0	1	2

Ermitteln Sie $|f(6) - p(6)|$ exakt und schätzen Sie den Fehler ab.

Aufgabe 3: **(8 Punkte)**

1. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Untersuchen Sie das lineare Iterationsverfahren
$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{b}) := 2\mathbf{I}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$
auf Konsistenz und Konvergenz. *Hinweis*: Mit $\mathbf{I}$ wird die Einheitsmatrix bezeichnet.

2. Untersuchen Sie das Gauß-Seidel-Verfahren auf Konvergenz für die Matrix
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}.$$
Hinweis: Berechnen Sie nicht den Spektralradius der Iterationsmatrix, sondern verwenden Sie das zugehörige Konvergenzkriterium aus der Vorlesung.

Aufgabe 4: **(12 Punkte)**

1. Bestimmen Sie das Butcher-Array
$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 1/4 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 1/2 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$
derart, dass das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren mindestens die Konsistenzordnung 3 besitzt.

2. Gegeben sei das Runge-Kutta-Verfahren
$$\begin{aligned} k_1 &= y_i \\ k_2 &= y_i + \frac{\Delta t}{k} f(t_i, k_1) \\ y_{i+1} &= y_i + \Delta t f\left(t_i + \frac{\Delta t}{k}, k_2\right) \end{aligned}$$
   (a) Erstellen Sie das zum Verfahren gehörende Butcher-Array.
   (b) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5: **(10 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x \sin x$.

1. Man bestimme $\int\limits_0^{\pi/2} f(x)\, dx$ exakt.

2. Man berechne mit der Trapezregel einen Näherungswert für $\int\limits_0^{\pi/2} f(x)\, dx$.

3. Man führe eine Fehlerabschätzung für den Näherungswert durch und vergleiche diese mit dem tatsächlichen Fehler.