Fachbereich Mathematik und Informatik **WiSe 2003/2004**
Prof. Dr. Andreas Meister

Numerik I

Aufgabenblatt 12

Aufgabe 1
Gegeben sei das Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} \;=\; \begin{pmatrix} 0.78 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} \;=\; \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{pmatrix}$$

a) Wie lautet die exakte Lösung?

b) Berechnen Sie für die beiden Näherungslösungen $\boldsymbol{u} = (0.999, -1.001)^T$ und $\boldsymbol{v} = (0.341, -0.087)^T$ die Residuen $r(\boldsymbol{u})$ und $r(\boldsymbol{v})$. Hat die „genauere" Lösung $\boldsymbol{u}$ das kleinere Residuum? Erklären Sie die Diskrepanz durch Betrachtung der Residuenfunktion r. (Das Residuum $r(\boldsymbol{z})$ einer Näherungslösung $\boldsymbol{z}$ der Gleichung $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist durch $r(\boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{z}\|_2$ definiert.)

Aufgabe 2
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit und gelte $A^j = A$ für ein $j \in \mathbb{N}$ mit $n > j > 1$, dann liefert das CG-Verfahren spätestens mit x_j die exakte Lösung der Gleichung $Ax = b$ für beliebiges $b \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermitesch und positiv definit, $b \in \mathbb{C}^n$ und

$$F(x) \;:=\; \frac{1}{2}\,(Ax, x)_2 - \text{Re}\,((b, x)_2)\,.$$

Zeigen Sie:

a) $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, d.h. F ist reellwertig.

b) $\text{Re}\,((b, x^*)_2) = (b, x^*)_2$ für $x^* = A^{-1}b$.

c) $F(x) = \frac{1}{2}\,\{(A(x - x^*), x - x^*)_2 - (b, x^*)_2\}$ für $x^* = A^{-1}b$.

d) $F(x) = F(\tilde{x}) + \text{Re}\,((A\tilde{x} - b, x - \tilde{x})_2) + \frac{1}{2}\,(A(x - \tilde{x}), x - \tilde{x})_2$ für alle $\tilde{x} \in \mathbb{C}^n$.

e) Seien $x \in \mathbb{C}^n$, $p \in \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ gegeben, dann hat das Minimum der Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\;\to\; \mathbb{R} \\ \lambda &\;\mapsto\; F(x + \lambda p) \end{aligned}$$

die Darstellung

$$\lambda \;=\; \frac{\text{Re}\,((r, p)_2)}{(Ap, p)_2}$$

mit

$$r \;=\; b - Ax.$$

Aufgabe 4
Betrachten Sie das Verfahren der konjugierten Richtungen und konstruieren Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ sowie 4 A-orthogonale Suchrichtungen $p_0, \ldots, p_3$ derart, daß für gegebene rechte Seite $b = (10, 9, 8, 7)^T$ und Startvektor $x_0 = (1, 2, 3, 4)^T$ der durch das Verfahren ermittelte Fehlervektor

$$e_m \;=\; x_m - A^{-1}b$$

die Bedingung

$$\|e_m\|_2 \;\geq\; 2,749 \quad \text{für} \quad m = 0, 1, 2, 3$$

erfüllt.

Abgabe: **Dienstag, 10.2.2004 in der Vorlesung**