Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Andreas Meister **WiSe 2003/2004**

Numerik I

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1
Für die Normen $\|.\|_1, \|.\|_2$ und $\|.\|_\infty$ des $\mathbb{R}^n$ bestimme man die größten Zahlen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und die kleinsten Zahlen $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$a_1\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1 \leq b_1\|\boldsymbol{x}\|_2$$

und

$$a_2\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq b_2\|\boldsymbol{x}\|_\infty$$

für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Hinweis: Man verwende die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung! (4 P)

Aufgabe 2
Zwei lineare Gleichungssysteme (1) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ und (2) $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{d}$ heißen äquivalent, wenn sie dieselbe Lösungsmenge besitzen. Zeigen Sie, daß die Operationen

(i) Multiplikation einer Gleichung in (1) mit einer komplexen Zahl $(\neq 0)$,

(ii) Vertauschen zweier Gleichungen in (1)

(iii) Addition der j-ten Gleichung aus (1) zur i-ten Gleichung in (1),

(iv) Multiplikation des Systems (1) von links mit einer invertierbaren Matrix R

stets ein zu (1) äquivalentes Gleichungssystem liefern. (4 P)

Aufgabe 3

a) Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

mit

$$\boldsymbol{A}_{ii} \in \mathbb{R}^{m_i\times m_i}, \quad i = 1, 2$$

wobei

$$m_1 + m_2 = n$$

und

$$\det \boldsymbol{A}_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2$$

gilt.

Man zeige, dass $\boldsymbol{A}$ invertierbar ist und bestimme eine Blockdarstellung der Inversen $\boldsymbol{A}^{-1}$.

b) Unter Benutzung geeigneter Blockbildungen berechne man die Inversen von

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4 P)

Abgabe: Dienstag, 4.11.2003 in der Vorlesung