

Numerik I

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1

Es sei $C[0, 1]$ der lineare Raum der auf $[0, 1]$ stetigen Funktionen. Zeigen Sie

$$\|f\|_{\infty} := \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \quad \text{für alle } f \in C[0, 1]$$

und

$$\|f\|_2 := \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{für alle } f \in C[0, 1]$$

sind Normen auf $C[0, 1]$ und diese Normen sind nicht äquivalent. (4 P)

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Hermitesch und positiv definit. Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathbf{A}} : \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}} := \|\mathbf{A}^{1/2} \mathbf{x}\|_2 \end{aligned}$$

stellt eine Norm auf \mathbb{C}^n dar.

Bemerkung: Sei $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die unitäre Matrix mit

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{U} = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad d_i > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

dann gilt

$$\mathbf{D}^{1/2} = \text{diag}\left\{\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n}\right\}$$

und

$$\mathbf{A}^{1/2} = \mathbf{U} \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{U}^*.$$

(4 P)

Aufgabe 3

Eine Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt streng diagonal dominant, wenn

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |a_{ki}|, \quad k = 1, \dots, n$$

gilt.

Zudem sei $\mathbf{A}[k] := (a_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$, $k = 1, \dots, n$.

Zeigen Sie:

Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ streng diagonal dominant, dann ist $\mathbf{A}[k]$ regulär für $k = 1, \dots, n$. (4 P)

Aufgabe 4

a) Sei $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix.

Zeigen Sie:

(i) $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$

(ii) $\max_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}| = \max_{i=1,\dots,n} |a_{ii}|$

b) Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische, streng diagonal dominante Matrix mit positiven Diagonalelementen, dann ist \mathbf{A} positiv definit. (4 P)

Abgabe: **Dienstag, 11.11.2003 in der Vorlesung**