

# Numerik I

## Aufgabenblatt 3

### Aufgabe 1

Es sei  $C[0, 1]$  der lineare Raum der auf  $[0, 1]$  stetigen Funktionen. Zeigen Sie

$$\|f\|_\infty := \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \quad \text{für alle } f \in C[0, 1]$$

und

$$\|f\|_2 := \left( \int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{für alle } f \in C[0, 1]$$

sind Normen auf  $C[0, 1]$  und diese Normen sind nicht äquivalent. (4 P)

### Aufgabe 2

Sei  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  Hermitesch und positiv definit. Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\mathbf{A}} : \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}} := \|\mathbf{A}^{1/2} \mathbf{x}\|_2 \end{aligned}$$

stellt eine Norm auf  $\mathbb{C}^n$  dar.

*Bemerkung:* Sei  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  die unitäre Matrix mit

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{U} = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad d_i > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

dann gilt

$$\mathbf{D}^{1/2} = \text{diag} \left\{ \sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n} \right\}$$

und

$$\mathbf{A}^{1/2} = \mathbf{U} \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{U}^*.$$

(4 P)

### Aufgabe 3

Eine Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt streng diagonal dominant, wenn

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |a_{ki}|, \quad k = 1, \dots, n$$

gilt.

Zudem sei  $\mathbf{A}[k] := (a_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Zeigen Sie:

Ist  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  streng diagonal dominant, dann ist  $\mathbf{A}[k]$  regulär für  $k = 1, \dots, n$ . (4 P)

### Aufgabe 4

a) Sei  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische und positiv definite Matrix.

Zeigen Sie:

(i)  $a_{ii} > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$

(ii)  $\max_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}| = \max_{i=1,\dots,n} |a_{ii}|$

b) Ist  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische, streng diagonal dominante Matrix mit positiven Diagonalelementen, dann ist  $\mathbf{A}$  positiv definit. (4 P)

Abgabe: Dienstag, 11.11.2003 in der Vorlesung