Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Andreas Meister **WiSe 2003/2004**

Numerik I

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1
Es sei $C[0,1]$ der lineare Raum der auf $[0,1]$ stetigen Funktionen. Zeigen Sie

$$\|f\|_\infty := \max_{0\le x\le 1} |f(x)| \quad \text{für alle} \quad f \in C[0,1]$$

und

$$\|f\|_2 := \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \qquad \text{für alle} \quad f \in C[0,1]$$

sind Normen auf $C[0,1]$ und diese Normen sind nicht äquivalent. (4 P)

Aufgabe 2
Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermitesch und positiv definit. Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \|.\|_{\boldsymbol{A}} : \mathbb{C}^n &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}} := \|\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{x}\|_2 \end{aligned}$$

stellt eine Norm auf $\mathbb{C}^n$ dar.

Bemerkung: Sei $\boldsymbol{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die unitäre Matrix mit

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \operatorname{diag}\{d_1,\dots,d_n\} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad d_i > 0, \quad i = 1,\dots,n$$

dann gilt

$$\boldsymbol{D}^{1/2} = \operatorname{diag}\left\{\sqrt{d_1},\dots,\sqrt{d_n}\right\}$$

und

$$\boldsymbol{A}^{1/2} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}^{1/2}\boldsymbol{U}^*.$$

(4 P)

Aufgabe 3
Eine Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt streng diagonal dominant, wenn

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} |a_{ki}|, \quad k = 1,\ldots,n$$

gilt.

Zudem sei $\boldsymbol{A}[k] := (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}$, $k = 1,\ldots,n$.

Zeigen Sie:
Ist $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ streng diagonal dominant, dann ist $\boldsymbol{A}[k]$ regulär für $k = 1,\ldots,n$. (4 P)

Aufgabe 4

a) Sei $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix.

   Zeigen Sie:

   (i) $a_{ii} > 0, \quad i = 1,\ldots,n$

   (ii) $\max\limits_{i,j=1,\ldots,n} |a_{ij}| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |a_{ii}|$

b) Ist $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, streng diagonal dominante Matrix mit positiven Diagonalelementen, dann ist $\boldsymbol{A}$ positiv definit. (4 P)

Abgabe: **Dienstag, 11.11.2003 in der Vorlesung**