Fachbereich Mathematik und Informatik **WiSe 2003/2004**
Prof. Dr. Andreas Meister

Numerik I

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1
Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \beta \\ 16 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche Werte von α und β besitzt dieses Gleichungssystem
   (i) eine eindeutige Lösung,
   (ii) keine Lösung,
   (iii) unendlich viele Lösungen ?

b) Für den Fall, dass $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ eindeutig lösbar ist, gebe man die Lösung in Abhängigkeit von den Parametern α, β an.

c) Man gebe eine Lösungsdarstellung für den Fall (iii) von unendlich vielen Lösungen an.

d) Welchen Wert hat $\det \boldsymbol{A}$?

(4 P)

Aufgabe 2
Es sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeigen Sie

$$\boldsymbol{A}^j \;\to\; \boldsymbol{0}, \quad j \;\to\; \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho(\boldsymbol{A}) \;<\; 1$$

(4 P)

Aufgabe 3
Leiten Sie unter Verwendung des Banachschen Fixpunktsatzes ein iteratives Verfahren her, dass für jeden Startwert $x \in (0,1)$ gegen den in $(0,1)$ liegenden Fixpunkt der Funktion $f(x) = -\ln x$ konvergiert. (4 P)

Aufgabe 4
Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $\|\boldsymbol{A}\|_\infty, \|\boldsymbol{A}\|_1$ und $\|\boldsymbol{A}\|_F$.

b) Zeigen Sie, dass die Matrix singulär und positiv semi-definit ist.

c) Bestimmen Sie $\rho(\boldsymbol{A})$.

(4 P)

Abgabe: **Dienstag, 18.11.2003 in der Vorlesung**