Numerik I

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1

Definition: Eine Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt M-Matrix, falls

a) $a_{ii} > 0\,,\ i = 1,\ldots,n$
b) $a_{ij} \leq 0\,,\ i,j = 1,\ldots,n\,,\ i \neq j$
c) $\boldsymbol{A}$ ist regulär mit $\boldsymbol{A}^{-1} \geq 0$

gilt.

(1) Geben Sie ein Beispiel für eine M-Matrix an, die keine Diagonalmatrix darstellt.

(2) Zeigen Sie für eine M-Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

a) Sei $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{b}'$, dann folgt aus $\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{b}'$ auch $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}'$.

b) Für die zu $\boldsymbol{A}$ gehörige Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens gilt

$$\boldsymbol{M}_J \geq 0$$

und

$$\rho(\boldsymbol{M}_J) < 1.$$

Bemerkungen:
Die Relationen $\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{0}$ respektive $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ sind stets komponentenweise zu verstehen. Nutzen Sie die Aussage, daß für $\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{0}$ stets zu $\lambda = \rho(\boldsymbol{A})$ ein Eigenvektor $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ gehört. (4 P)

Aufgabe 2

Es sei $C[-a,a]$ versehen mit der Maximumnorm und $A : C[-a,a] \to C[-a,a]$ der Operator, der jeder Funktion $f \in C[-a,a]$ die Funktion $Af = g$ mit

$$g(t) = t + \int_0^t f(s)ds, \quad -a \leq t \leq a$$

zuordnet. Für welches $a > 0$ ist A kontrahierend? Was ist der Fixpunkt von A? (4 P)

Aufgabe 3
Wir betrachten Matrizen $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \geq 2)$ mit $a_{ii} = 1\,,\ i = 1,\dots,n$ und $a_{ij} = a$ für $i \neq j$.

a) Wie sieht die Iterationsmatrix des Jacobi-Verfahrens zu $\boldsymbol{A}$ aus? Berechnen Sie ihre Eigenwerte und die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$.

b) Für welche a konvergiert das Jacobi-Verfahren? Für welche a ist $\boldsymbol{A}$ positiv definit?

c) Gibt es positiv definite Matrizen $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für die das Jacobi-Verfahren nicht konvergiert?

(4 P)

Abgabe: Dienstag, 2.12.2003 in der Vorlesung